Bölüm 12

Sonlu Değişmeli Grupların Yapısı

Bu bölümde sonlu değişmeli grupların temel teoremini vererek bu grupların yapısını belirleyeceğiz.

12.1 Sonlu Değişmeli Gruplar

Teorem 12.1.1 (Değişmeli Gruplar İçin Cauchy Teoremi) *G mertebesi n olan değişmeli bir grup ve p bir asal sayı olmak üzere $p \mid n$ olsun. O zaman G nin mertebesi p olan en az bir elemanı vardır.*

Teorem 12.1.2 *G aşikar olmayan sonlu grup ve p bir asal sayı olsun. G nin bir p-grup olması için gerek ve yeter şart $|G| = p^k$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısının var olmasıdır.*

Teorem 12.1.3 *G sonlu değişmeli bir grup, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ olsun. Bu durumda G grubunun G_p altgrubu G nin bir Sylow p-altgrubudur.*

Örnek 12.1.4 G_p altgrupları yardımıyla $G = \mathbb{Z}_{15}$ değişmeli grubunun Sylow p-altguplarını bulalım. $|\mathbb{Z}_{15}| = 15 = 3 \cdot 5$ olduğundan $\mathbb{Z}_{15}$ grubunun Sylow 3 ve Sylow 5-altgrupları vardır. G nin G_3 ve G_5 altgruplarını belirleyerek aynı zamanda G nin Sylow p-altgruplarını belirlemiş oluruz. Bu altgruplar

$$\begin{aligned} G_3 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 3^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\} \\ &= \langle \overline{5} \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_5 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 5^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\} \\ &= \langle \overline{3} \rangle \end{aligned}$$

şeklindedir. ▲

Teorem 12.1.5 *G mertebesi $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ olan değişmeli bir grup, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ için p_i ler farklı asal sayılar, $m_i \in \mathbb{Z}^+$ ve G_{p_i} ler G grubunun p_i asal sayısına karşılık gelen Sylow p_i-altgrupları olsun. Bu durumda*

$$G = G_{p_1} \oplus G_{p_2} \oplus \cdots \oplus G_{p_r}$$

dir.

Örnek 12.1.6 $G = \mathbb{Z}_{30}$ değişmeli grubunu altguplarının direkt toplamı olarak yazalım. $|\mathbb{Z}_{30}| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olup $\mathbb{Z}_{30}$ grubunun Sylow 2, Sylow 3 ve Sylow 5-altgrupları vardır. $G_2,\ G_3$ ve G_5 aradığımız Sylow p-altgruplarıdır. Bu altgruplar

$$\begin{aligned} G_2 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 2^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ var}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{15}\} \\ &= \langle \overline{15} \rangle \\ \\ G_3 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 3^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ var}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{20}\} \\ &= \langle \overline{10} \rangle \\ \\ G_5 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 5^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ var}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\} \\ &= \langle \overline{6} \rangle \end{aligned}$$

olup Teorem 12.1.5 gereğince

$$G = \mathbb{Z}_{30} = \langle \overline{15} \rangle \oplus \langle \overline{10} \rangle \oplus \langle \overline{6} \rangle$$

şeklinde altgruplarının iç direkt toplamı olarak yazılır. ▲

12.2 Sonlu Değişmeli Grupların Sınıflandırılması

Teorem 12.2.1 (Sonlu Değişmeli Grupların Temel Teoremi) *G sonlu değişmeli bir grup, $i = 1, 2, \ldots, r$ için p_i ler farklı asal sayılar ve $m_i \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $|G| = n$ ve $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ ise o zaman*

(i) *$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{m_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{m_r}}$ dir.*

(ii) *Eğer m_i nin parçalanmalarının sayısı $p(m_i)$ ise o zaman mertebesi n olan ve G grubuna izomorf olmayan bütün değişmeli grupların sayısı $p(m_1)p(m_2)\ldots p(m_r)$ dir.*

Örnek 12.2.2 Mertebesi 72 olan ve birbirine izomorf olmayan bütün değişmeli grupları belirleyelim. $72 = 2^3 \cdot 3^2$ olup 3 ve 2 nin parçalanmaları

$$\begin{array}{ll} (3) & (2) \\ (2,1) & (1,1) \\ (1,1,1) & \end{array}$$

olup Sonlu Değişmeli Grupların Temel Teoremi gereğince mertebesi 72 olan ve birbirine izomorf olmayan bütün değişmeli grupların sayısı $p(3)p(2) = 3 \cdot 2 = 6$ dir. Bütün bu gruplar

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

şeklindedir. ▲

Örnek 12.2.3 Mertebesi 144 olan ve birbirine izomorf olmayan bütün değişmeli grupları belirleyelim. $144 = 2^4 \cdot 3^2$ olup 4 ve 2 nin parçalanmaları

$$\begin{array}{ll} (4) & (2) \\ (3,1) & (1,1) \\ (2,2) & \\ (2,1,1) & \\ (1,1,1,1) & \end{array}$$

olduğundan Sonlu Değişmeli Grupların Temel Teoremi gereğince $p(4)p(2) = 5 \cdot 2 = 10$ tane birbirine izomorf olmayan değişmeli grup vardır. Bütün bu gruplar

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

şeklindedir. ▲

Örnek 12.2.4 Mertebesi 30 ve birbirine izomorf olan bütün değişmeli grupları belirleyelim. $30 = 2.3.5$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ olması için gerek ve yeter şart $(m, n) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{15} \\ &\cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{10} \\ &\cong \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_6 \\ &\cong \mathbb{Z}_{30} \end{aligned}$$

elde edilir. ▲