MAT301 FİNAL SINAVI SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. (a) $\mathbb{I}$ irrasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $H := \{x \in \mathbb{R}^* |\ x = 1 \text{ ya da } x \in \mathbb{I}\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda H kümesi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grubunun bir altgrubu mudur? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : $\sqrt{3} \in H$ olmasına rağmen $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \notin \mathbb{I}$ olduğundan H kümesi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grubunun bir altgrubu değildir.

   (b) $S_3 =< (12), (23) >$ midir? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : S_3 simetrik grubunda

$$\begin{aligned}
(1) &= (12)(12) \\
(12) &= (12) \\
(13) &= (12)(23)(12) \\
(23) &= (23) \\
(123) &= (12)(23) \\
(132) &= (23)(12)
\end{aligned}$$

   olduğundan $S_3 =< (12), (23) >$ dir.

2. (a) $(\mathbb{Q}, +)$ ile $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ izomorf mudur? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : $(\mathbb{Q}, +)$ ile $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ izomorf değildir. Kabul edelim ki $\theta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$ bir izomorfizma olsun. θ örten olduğundan $\theta(a) = -1$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Q}$ vardır. Fakat o zaman

$$-1 = \theta(a) = \theta(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a) = \theta(\frac{1}{2}a) \cdot \theta(\frac{1}{2}a) = [\theta(\frac{1}{2}a)]^2$$

   olduğundan bu bir çelişkidir.

   (b) Mertebesi asal olan her grup devirli midir? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : p bir asal sayı olmak üzere G mertebesi p olan bir grup ve $e \neq a \in G$ olsun. O zaman $o(a) \mid |G|$ yani $o(a) \mid p$ dir. Böylece $o(a) = p$ ya da $o(a) = 1$ dir. Fakat $a \neq e$ olduğundan $o(a) = p$ bulunur. $o(a) = |\langle a \rangle| = p = |G|$ ve $\langle a \rangle \subseteq G$ olduğundan $G = \langle a \rangle$ bulunur ki bu G nin bir devirli grup olması demektir.

3. (a) S_4 simetrik grubunun $V = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ altgrubu ve $f: S_3 \longrightarrow S_4/V$, $f(\sigma) = \sigma V$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}((1234)V)$ kümesini belirleyiniz.

ÇÖZÜM :

$$\begin{aligned}(1234)V &= (1234)\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\\ &= \{(1234),(13),(1432),(24)\}\\ &= (13)V\end{aligned}$$

olduğundan $f^{-1}((1234)V) = f^{-1}((13)V) = \{(13)\}$ tür.

(b) Mertebesi 432 olan ve birbirine izomorf olmayan bütün değişmeli grupları belirleyiniz.

ÇÖZÜM : Eğer G mertebesi 432 olan değişmeli bir grup ise Sonlu Değişmeli Grupların Temel Teoremi gereğince $432 = 2^4 \cdot 3^3$ olup $p(4) = 5$ ve $p(3) = 3$ olduğundan birbirine izomorf olmayan değişmeli grupların sayısı $p(4) \cdot p(3) = 5 \cdot 3 = 15$ tir. Bütün bu gruplar

$\mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{3^3}$	$\mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$	$\mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$
$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^3}$	$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$	$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$
$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^3}$	$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$	$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$
$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^3}$	$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$	$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$
$\mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^3}$	$\mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$	$\mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{2^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1} \oplus \mathbb{Z}_{3^1}$

şeklindedir.

4. (a) Mertebesi 42875 olan bir grubun mertebesi 343 olan bir normal altgrubu var mıdır? Araştırınız.

ÇÖZÜM : Kabul edelim ki G mertebesi 42875 olan grup olsun. $42875 = 5^3 \cdot 7^3$ olduğundan G nin Sylow 5 ve Sylow 7-altgrupları vardır. n_7, G nin Sylow 7-altgruplarının sayısını göstermek üzere $n_7 \mid 5^3 7^3$ ve $n_7 \equiv 1 \pmod 7$ olacaktır. Eğer $n_7 \mid 5^3 7^3$ ise o zaman $n_7 = 1, 5, , 7, 5^2, 5.7, 7^2, 5^3 \ldots$ ve $n_7 \equiv 1 \pmod 7$ ise o zaman $n_7 = 1, 8, 15 \ldots$ olduğundan $n_7 = 1$ dir. Bu sebeple G nin bir tek Sylow 7-altgrubu vardır. Sylow Teoremleri gereğince bu altgrubu P ile gösterecek olursak o zaman $P \lhd G$ dir. Ayrıca $|P| = 7^3 = 343$ olduğu açıktır.

(b) $\mathbb{Z}_{210}$ toplamsal grubunu aşikar olmayan altgruplarının direkt toplamı olarak yazınız.

ÇÖZÜM : $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ olduğundan Teorem gereğince

$$\mathbb{Z}_{210} = G_2 \oplus G_3 \oplus G_5 \oplus G_7$$

dir. Diğer taraftan bu altgruplar $G_2 = \langle \overline{105} \rangle$, $G_3 = \langle \overline{70} \rangle$, $G_5 = \langle \overline{42} \rangle$, $G_7 = \langle \overline{30} \rangle$ şeklindedir.