2. Artma ve Azalma Problemleri

$N(t)$ artan veya azalan madde miktarını (veya nüfusu) göstersin. Madde miktarının zamanla değişim hızının mevcut madde miktarı ile orantılı olduğu kabul edilirse,

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada k orantı sabitidir.

Örnek 1. Bir radyoaktif maddenin miktarı ile orantılı bir hızla yok olduğu bilinmektedir. 150 yıl sonunda madde miktarının yarısının yok olduğu gözlemlendiğine göre

(a) 450 yıl sonunda madde miktarının yüzde kaçı kalır?

(b) Kaç yıl sonra başlangıçtaki miktarının %10 u kalır?

Çözüm. $N(t)$ herhangi bir t anındaki madde miktarını, N_0 başlangıçtaki madde miktarını göstersin. Bu durumda

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{1}$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada $k < 0$ orantı sabitidir. (1) diferensiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olup integre edilirse

$$N(t) = ce^{kt} \tag{2}$$

genel çözümü bulunur, burada c integral sabitidir. $N(0) = N_0$ başlangıç koşulu uygulanırsa (2) den

$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{3}$$

bulunur. k orantı sabitini belirlemek için $N(150) = \dfrac{1}{2}N_0$ koşulu (3) denkleminde göz önüne alındığında $k = \dfrac{1}{150}\ln\dfrac{1}{2}$ ve buradan

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{150}} \tag{4}$$

elde edilir

(a) (4) den $N(450) = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^3$ olup 450 yıl sonunda başlangıçtaki madde miktarının %12.5 i kalır.

(b) $N(t_1) = \dfrac{1}{10}N_0$ olacak şekildeki t_1 yılını arıyoruz. (4) den elde edilen

$$\frac{1}{10}N_0 = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\dfrac{t_1}{150}}$$

denklem çözüldüğünde

$$t_1 = 150\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

elde edilir.

Örnek 2. Bir kültürdeki bakteri miktarı ile orantılı bir hızla artmaktadır. Başlangıçta 30 bakteri lifi vardır ve iki saat sonra bu sayı %20 artmıştır.

(a) Herhangi bir t anında kültürdeki yaklaşık lif sayısını bulunuz.

(b) Bakteri miktarının başlangıçtakinin iki katına çıkması için gereken zamanı bulunuz.

Çözüm. $N(t)$ herhangi bir t anında kültürdeki bakteri miktarını göstersin. Bu durumda

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{5}$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada $k > 0$ orantı sabitidir. (5) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$N(t) = ce^{kt} \tag{6}$$

olup, $N(0) = 30$ ve $N(2) = 36$ olduğuna dikkat edilmelidir.

(a) (6) çözümünde $N(0) = 30$ olduğu göz önüne alınırsa

$$N(t) = 30e^{kt}$$

bulunur. k orantı sabitini belirlemek için $N(2) = 36$ koşulu göz önüne alınırsa, $k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$ ve herhangi bir t anındaki yaklaşık lif sayısı

$$N(t) = 30\left(\frac{6}{5}\right)^{\dfrac{t}{2}} \tag{7}$$

bulunur.

(*b*) $N(t_1) = 60$ olacak şekildeki t_1 belirlenmelidir. (7) den elde edilen

$$60 = 30\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{t_1}{2}}$$

denklemi çözüldüğünde $t_1 = \dfrac{\ln 4}{\ln 1.2}$ bulunur.