KISA YÖNTEMLER

Bu bölümde n-yinci basamaktan sabit katsayılı lineer diferensiyel

$$L(D)y = f(x) \tag{1}$$

denkleminin bir özel çözümünün bulunması ele alınacaktır. Burada

$$L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n - 1\, D + a_n$$

ve $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayıları verilmiş reel sabitlerdir.

(1) in bir özel çözümü

$$y_p = \frac{1}{L(D)} f(x)$$

dir. $f(x)$ in belli durumları için $\frac{1}{L(D)}$ operatörünün uygulama biçimleri aşağıda verilmektedir:

Teorem 1. $f(x) = e^{\alpha x}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{L(\alpha)} e^{\alpha x} \qquad L(\alpha) \neq 0$$

dır.

Örnek 1. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$

denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 5D + 6} e^{4x} = \frac{1}{18} e^{4x}$$

Uyarı. $L(\alpha) = 0$ ise o zaman,

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \frac{1}{L(D+\alpha)}$$

dır.

Örnek 2. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{3x}$

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 5D + 6} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)(D-1)(D+2)} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{D-3} \frac{1}{10} e^{3x} = \frac{1}{10} \frac{1}{D-3}\, e^{3x} = \frac{e^{3x}}{10} \frac{1}{D}\, 1 = \frac{1}{10} x e^{3x}.$$

Teorem 2. $f(x) = p(x)$, k-yıncı dereceden bir polinom olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{L(D)}p(x) = (1 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_k D^k)p(x)$$

dir.

Örnek 1. $(2D^2 + 2D + 3)y = x^2 + 2x - 1$

$$y_p = \frac{1}{2D^2 + 2D + 3}(x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2D^2+2D}{3}} \; (x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2D^2+2D}{3} + \left(\frac{2D^2+2D}{3}\right)^2 + \cdots\right](x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2}{3}D - \frac{2}{9}D^2 + \cdots\right](x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{3}(2x + 2) - \frac{2}{9}2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{9}\right]$$

Teorem 3.

1) $f(x) = Sin(ax + b)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D^2)}Sin(ax + b) = \frac{1}{L(-a^2)}Sin(ax + b)\,, \qquad L(-a^2) \neq 0$$

2) $f(x) = Cos(ax + b)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D^2)}Cos(ax + b) = \frac{1}{L(-a^2)}Cos(ax + b)\,, \qquad L(-a^2) \neq 0$$

dir.

Örnek 1. $(D^2 + 4)y = Sin3x$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4}Sin3x = \frac{1}{-9 + 4}Sin3x = -\frac{1}{5}Sin3x$$

Uyarı. $f(x) = Sin(ax+b)$ için $L(-a^2) = 0$ ize, ozaman $Sin(ax+b)$ yerine

$e^{i(ax+b)}$ konularak Teorem 1. uygulanır. En son elde edilen $y = u(x) + iv(x)$ ifadesinden $y_p = v(x)$ bulunur. $f(x) = Cos(ax+b)$ durumunda $y_p = u(x)$ dir.

Örnek 2. $(D^2+4)y = Cos2x + Cos4x$

$$y_{p_2} = \frac{1}{D^2+4}cos4x = -\frac{1}{12}Cos4x$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{D^2+4}Cos2x = \frac{1}{D^2+4}e^{2ix}$$

$$= e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4} = e^{2ix}\frac{1}{D^2+4iD}$$

$$= e^{2ix}\frac{1}{D}\frac{1}{D+4iD} = \frac{e^{2ix}}{4i}\frac{1}{D} = \frac{xe^{2ix}}{4i}$$

$$= \frac{x}{4}Sin2x + i(-\frac{x}{4}Cos2x)$$

$$\Longrightarrow y_{p_1} = \frac{x}{4}Sin2x$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y_p = \frac{x}{4}Sin2x - \frac{1}{12}Cos4x$$

Teorem 4. $f(x) = e^{\alpha x}v(x)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D)}e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{L(D+\alpha)}v(x)$$

dir.

Örnek 1. $(D-2)^2 y = e^{2x}\frac{1}{x^2}$

$$y_p = \frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}\frac{1}{x^2} = e^{2x}\frac{1}{D^2}\frac{1}{x^2} = -e^{2x}lnx$$

Örnek 2. $y'' + y = e^{2x}Cosx$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}e^{2x}Cosx = e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1}Cosx$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D^2+4D+5}Cosx = e^{2x}\frac{1}{4D+4}Cosx$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(D-1)\frac{1}{D^2-1}Cosx = -\frac{e^{2x}}{8}(D-1)Cosx$$

$$= -\frac{e^{2x}}{8}(-sinx - cosx) = \frac{e^{2x}}{8}(sinx + cosx)$$