

Lineer cebirsel denklemler, Bilinmeyenlerin eliminasyonu, Gauss yoketme, Çözüm geliştirme teknikleri [1-5]

Kaynaklar

1. Chapra S.C. and Canale R.P. “Numerical Methods for Engineers”, Sixth Edition, McGraw Hill, International Edition 2010.
2. Chapra S.C. and Canale R. P. “Yazılım ve programlama Uygulamalarıyla Mühendisler için Sayısal Yöntemler” 4.Basımdan Çevirenler: Hasan Heperkan ve Uğur Kesgin 2003.
3. Chapra S.C. “Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and Scientists” Third Edition, McGraw Hill, International Edition 2012.
4. Mathews J.H. and Fink K.D. “Numerical Methods using MATLAB”, Fourth Edition, Pearson P. Hall, International Edition 2004.
5. Fausett L.V. “Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Second Edition, Pearson P. Hall, International Edition, 2008.
6. Gilat A. And Subramaniam V. “Numerical Methods, An introduction with Applications Using MATLAB”, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc. 2011.

Gauss Yoketme

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

İlk denklemi (1/1) ile çarpın ve sonucu ikinci denklemden çıkarın. (İkinci satırdan x_1 teriminin azaltılması.)

$$[1 \quad -2 \quad 2 \quad 4] - \left(\frac{1}{1}\right)[1 \quad 1 \quad 1 \quad 11] = [0 \quad -3 \quad 1 \quad -7]$$

İlk denklemi (1/1) ile çarpın ve sonucu üçüncü denklemden çıkarın. (Üçüncü satırdan x_1 teriminin azaltılması.)

$$[1 \quad 1 \quad -1 \quad 1] - \left(\frac{1}{1}\right)[1 \quad 1 \quad 1 \quad 11] = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -10]$$

Bu işlemlerden sonra denklem seti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} 11 \\ -7 \\ -10 \end{cases}$$

Artık bu denklemleri geriye doğru çözümlerle çözebiliriz.

$$-2x_3 = -10 \quad \rightarrow \quad x_3 = 5$$

$$-3x_2 + x_3 = -7 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$$

MATLAB komutları ile lineer cebirsel denklem setini çözme:

$$\begin{aligned}5x_1 - 0.2x_2 - 0.8x_3 &= 4.86 \\0.2x_1 + 9x_2 - 0.9x_3 &= -58.02 \\0.4x_1 - 0.3x_2 + 12x_3 &= 60\end{aligned}$$

```
>> A=[5 -0.2 -0.8;0.2 9 -0.9; 0.4 -0.3 12];  
>> B=[4.86; -58.02; 60];  
>> x=A\B  
or  
>> x=inv(A)*B
```

A.X = B doğrusal denklem sistemini çözmek için Gauss eliminasyon yöntemi

$$A = \begin{bmatrix} 49 & -7 & 14 \\ -7 & 26 & 3 \\ 14 & 3 & 21 \end{bmatrix}, X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, B = \begin{Bmatrix} 126 \\ -53 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 49 & -7 & 14 & 126 \\ -7 & 26 & 3 & -53 \\ 14 & 3 & 21 & -3 \end{bmatrix}$$

İlk satırı $(-7/49)$ ile çarpın ve sonucu ikinci satırdan çıkarın. (İkinci satırdan x_1 teriminin azaltılması.)

$$[-7 \ 26 \ 3 \ -53] - \left(\frac{-7}{49}\right)[49 \ -7 \ 14 \ 126] = [0 \ 25 \ 5 \ -35]$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 49 & -7 & 14 & 126 \\ 0 & 25 & 5 & -35 \\ 14 & 3 & 21 & -3 \end{bmatrix}$$

ilk satırı(14/49) ile çarpın ve sonucu üçüncü satırdan çıkarın. (üçüncü satırdan x_1 teriminin azaltılması.)

$$[14 \ 3 \ 21 \ -3] - \left(\frac{14}{49}\right)[49 \ -7 \ 14 \ 126] = [0 \ 5 \ 17 \ -39]$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 49 & -7 & 14 & 126 \\ 0 & 25 & 5 & -35 \\ 0 & 5 & 17 & -39 \end{bmatrix}$$

ikinci satırı(5/25) ile çarpın ve sonucu üçüncü satırdan çıkarın. (üçüncü satırdan x_2 teriminin azaltılması.)

$$[0 \ 5 \ 17 \ -39] - \left(\frac{14}{49}\right)[0 \ 25 \ 5 \ -35] = [0 \ 0 \ 16 \ -32]$$

$$\begin{bmatrix} 49 & -7 & 14 \\ 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 126 \\ -35 \\ -32 \end{Bmatrix}$$

Geriye doğru çözümle bilinmeyenleri bulabiliriz.

$$16x_3 = -32 \quad \rightarrow \quad x_3 = -2$$

$$25x_2 + 5x_3 = -35 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$49x_1 - 7x_2 + 14x_3 = 126 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3$$

Aşağıdaki denklem takımını Gauss
Yoketme ile çözelim:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 & (1) \\2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 & (2) \\4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 & (3) \\-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 & (4)\end{aligned}$$

Üst üçgen matrisi elde etmek için, denklem kümesinden x_1 , x_2 , ve x_3 'ü ortadan kaldırmamız gerekir.

Adım 1: x_1 için ileriye doğru yoketme

$$2/ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \quad (1)$$

$$2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 28 \quad (2)$$

$$\underline{2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 26} \quad (1)$$

$$-4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \quad (5) \quad x_1 \text{ yokedilir.}$$

Adım 2: x_1 için ileriye doğru yoketme

$$4/x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \quad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \quad (3)$$

$$\underline{4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 16x_4 = 52} \quad (1)$$

$$-6x_2 - 2x_3 - 15x_4 = -32 \quad (6)$$

x_1 yok edilir.

Adım 3: x_1 için ileriye doğru yoketme

$$-3/x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \quad (1)$$

$$-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \quad (4)$$

$$\underline{-3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 12x_4 = -39} \quad (1)$$

$$7x_2 + 6x_3 + 14x_4 = 45 \quad (7)$$

x_1 yok edilir.

Adım 4.: x_2 için ileriye doğru yoketme

$$\frac{6}{4} / -4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \quad (5)$$

$$-6x_2 - 2x_3 - 15x_4 = -32 \quad (6)$$

$$\underline{-6x_2 + 3x_3 - 7.5x_4 = 3 \quad (5)}$$

$$-5x_3 - 7.5x_4 = -35 \quad (8) \quad x_2 \text{ yok edilir.}$$

Adım 5.: x_2 için ileriye doğru yoketme

$$-\frac{7}{4} / -4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \quad (5)$$

$$7x_2 + 6x_3 + 14x_4 = 45 \quad (7)$$

$$\underline{7x_2 - 3.5x_3 + 8.75x_4 = -3.5 \quad (5)}$$

$$9.5x_3 + 5.25x_4 = 48.5 \quad (9) \quad x_2 \text{ yok edilir.}$$

Adım 6.: x_3 için ileriye doğru yoketme

$$-\frac{9.5}{5} / -5x_3 - 7.5x_4 = -35 \quad (8)$$

$$9.5x_3 + 5.25x_4 = 48.5 \quad (9)$$

$$\underline{9.5x_3 + 14.25x_4 = 66.5 \quad (8)}$$

$$-9x_4 = -18 \quad (10) \quad x_3 \text{ yok edilir.}$$

Böylece üst üçgen matris:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \quad (1)$$

$$-4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \quad (5)$$

$$-5x_3 - 7.5x_4 = -35 \quad (8)$$

$$-9x_4 = -18 \quad (10)$$

Geriyeye Doğru çözüm:

$$-9x_4 = -18 \quad x_4 = 2$$

$$-5x_3 - 7.5x_4 = -35$$

$$-5x_3 - 15 = -35 \quad x_3 = 4$$

$$-4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2$$

$$-4x_2 + 8 - 10 = 2 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13$$

$$x_1 - 2 + 4 + 8 = 13 \quad x_1 = 3$$