

LU Ayrıştırması, Matris Tersisi [1-6]

Kaynaklar:

1. Chapra S.C. and Canale R.P. "Numerical Methods for Engineers", Sixth Edition, McGraw Hill, International Edition 2010.
2. Chapra S.C. and Canale R. P. "Yazılım ve programlama Uygulamalarıyla Mühendisler için Sayısal Yöntemler" 4.Basımdan Çevirenler: Hasan Heperkan ve Uğur Kesgin 2003.
3. Chapra S.C. "Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and Scientists" Third Edition, McGraw Hill, International Edition 2012.
4. Mathews J.H. and Fink K.D. "Numerical Methods using MATLAB", Fourth Edition, Pearson P. Hall, International Edition 2004.
5. Fausett L.V. "Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Second Edition, Pearson P. Hall, International Edition, 2008.
6. Gilat A. And Subramaniam V. "Numerical Methods, An introduction with Applications Using MATLAB", Second Edition, John Wiley and Sons. Inc. 2011.

Matrisin tersini belirlemek için LU ayrıştırması

$$[U] = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & -10 & 5.5 \\ 0 & 0 & -18.65 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -4 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

Birinci adım:

$$[L] * \{D\} = \{b\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -4 & 2.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1$$

$$-1.5d_1 + d_2 = 0$$

$$-4d_1 + 2.3d_2 + d_3 = 0 \quad \rightarrow \quad d_2 = 1.5 \text{ and } d_3 = 0.55. \text{ So; } \{D\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.55 \end{pmatrix}$$

$$[U] * \{X\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & -10 & 5.5 \\ 0 & 0 & -18.65 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.55 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= 1 \\ -10x_1 + 5.5x_3 &= 1.5 \rightarrow x_1 = -0.0134; x_2 = -0.1662; x_3 = -0.0295 \\ -18.65x_3 &= 0.55 \end{aligned}$$

$$A^{-1} \text{ 'in birinci kolonu} = \begin{Bmatrix} -0.0134 \\ -0.1662 \\ -0.0295 \end{Bmatrix}$$

ikinci adım:

$$[L] * \{D\} = \{b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -4 & 2.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = 0$$

$$-1.5d_1 + d_2 = 1$$

$$-4d_1 + 2.3d_2 + d_3 = 0 \rightarrow d_2 = 1 \text{ and } d_3 = -2.3. \text{ So; } \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2.3 \end{Bmatrix}$$

$$[U] * \{X\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & -10 & 5.5 \\ 0 & 0 & -18.65 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2.3 \end{Bmatrix}$$

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = 0$$

$$-10x_1 + 5.5x_3 = 1 \rightarrow x_1 = -0.0349; x_2 = -0.0322; x_3 = 0.1233$$

$$-18.65x_3 = -2.3$$

$$\mathbf{A}^{-1} \text{ 'in ikinci kolonu} = \begin{Bmatrix} -0.0349 \\ -0.0322 \\ 0.1233 \end{Bmatrix}$$

üçüncü adım:

$$[L] * \{D\} = \{b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -4 & 2.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = 0$$

$$-1.5d_1 + d_2 = 0$$

$$-4d_1 + 2.3d_2 + d_3 = 1 \rightarrow d_2 = 0 \text{ and } d_3 = 1 \text{ So; } \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[U] * \{X\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & -10 & 5.5 \\ 0 & 0 & -18.65 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = 0$$

$$-10x_1 + 5.5x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -0.1153; x_2 = -0.0295; x_3 = -0.0536$$

$$-18.65x_3 = 1$$

$$A^{-1} \text{ 'in üçüncü kolonu} = \begin{pmatrix} -0.1153 \\ -0.0295 \\ -0.0536 \end{pmatrix}$$

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} -0.0134 & -0.0349 & -0.1153 \\ -0.1662 & -0.0322 & -0.0295 \\ -0.0295 & 0.1233 & -0.0536 \end{bmatrix}$$

Matrisin tersini belirlemek için L U Ayrıştırması

$$\begin{array}{l} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5 \end{array} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -61.5 \\ -21.5 \end{bmatrix}$$

ileriye doğru yoketme:

A katsayı matrisinin 1.ci satırı (-3/10) ile çarpılıp 2.ci satırdan çıkartılır

$$[-3 \quad -6 \quad 2] - \left(\frac{-3}{10}\right)[10 \quad 2 \quad -1] = [0 \quad -5.4 \quad 1.7]$$

A katsayı matrisinin 1.ci satırı (1/10) ile çarpılıp 3.cü satırdan çıkartılır

$$[1 \quad 1 \quad 5] - \left(\frac{1}{10}\right)[10 \quad 2 \quad -1] = [0 \quad 0.8 \quad 5.1]$$

A katsayı matrisinin 2.ci satırı (-0.8/5.4) ile çarpılıp 3.cü satırdan çıkartılır

$$[0 \quad 0.8 \quad 5.1] - \left(\frac{-0.8}{5.4}\right)[0 \quad -5.4 \quad 1.7] = [0 \quad 0 \quad 5.3518]$$

ileriye doğru yoketmeden sonra aşağıdaki üst üçgen matris bulunur.

$$U = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 0 & -5.4 & 1.7 \\ 0 & 0 & 5.3518 \end{bmatrix}$$

Üst üçgeni elde etmek için kullanılan faktörler alt üçgen matrisine birleştirilebilir:

$$f_{21} = \frac{-3}{10} \quad f_{31} = \frac{1}{10}$$

$$f_{32} = \frac{0.8}{-5.4} \text{ ile } a_{32}' \text{ yok edilir.}$$

Alt üçgen matris

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1481 & 1 \end{bmatrix}$$

Matris Tersi :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1481 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 0 & -5.4 & 1.7 \\ 0 & 0 & 5.3518 \end{bmatrix}$$

$$[L][d] = [b] \quad \mathbf{b \text{ birim vektördür.}}$$

A matrisinin tersinin ilk kolonu için

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

birim matrisin ilk kolonu kullanılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1481 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_1=1 \quad d_2=0.3 \quad d_3=-0.05557$$

$$[U][x] = [d]$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 0 & -5.4 & 1.7 \\ 0 & 0 & 5.3518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \\ -0.05557 \end{bmatrix} \quad x_3=-0.01038 \quad x_2=-0.0588 \quad x_1=0.1107$$

A matrisinin tersinin ikinci kolonunu bulmak için ,

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Birim matrisin ikinci kolonu kullanılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1481 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_1=0 \quad d_2=1 \quad d_3=0.1481$$

$$[U][x] = [d]$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 0 & -5.4 & 1.7 \\ 0 & 0 & 5.3518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1481 \end{bmatrix} \quad x_1=0.03806 \quad x_2=-0.1764 \quad x_3=0.02767$$

A matrisinin tersinin üçüncü kolonunu bulmak için

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Birim matrisin üçüncü kolonu kullanılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1481 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d_1=0 \quad d_2=0 \quad d_3=1$$

$$[U][x] = [d]$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 0 & -5.4 & 1.7 \\ 0 & 0 & 5.3518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_1=0.00692 \quad x_2=0.0588 \quad x_3=0.1868$$

A matrisinin Tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1107 & 0.03806 & 0.00692 \\ -0.0588 & -0.1764 & 0.0588 \\ -0.01038 & 0.02767 & 0.1868 \end{bmatrix}$$