

Özel Matrisler [1-6]

Kaynaklar:

1. Chapra S.C. and Canale R.P. “Numerical Methods for Engineers”, Sixth Edition, McGraw Hill, International Edition 2010.
2. Chapra S.C. and Canale R. P. “Yazılım ve programlama Uygulamalarıyla Mühendisler için Sayısal Yöntemler” 4.Basımdan Çevirenler: Hasan Heperkan ve Uğur Kesgin 2003.
3. Chapra S.C. “Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and Scientists” Third Edition, McGraw Hill, International Edition 2012.
4. Mathews J.H. and Fink K.D. “Numerical Methods using MATLAB”, Fourth Edition, Pearson P. Hall, International Edition 2004.
5. Fausett L.V. “Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Second Edition, Pearson P. Hall, International Edition, 2008.
6. Gilat A. And Subramaniam V. “Numerical Methods, An introduction with Applications Using MATLAB”, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc. 2011.

Simetrik Matrise Cholesky Ayrıştırması

$$\begin{bmatrix} 8 & 20 & 15 \\ 20 & 80 & 50 \\ 15 & 50 & 60 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} 100 \\ 250 \\ 100 \end{cases}$$

Birinci satır için (k=1)

$$l_{11} \rightarrow k = 1 \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11} - \sum_{j=1}^0 l_{kj}^2} \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{8} = 2.8284$$

İkinci satır için (k=2)

$$l_{21} \rightarrow k = 2, \quad i = 1 \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21} - \sum_{j=1}^0 l_{ij} l_{kj}}{l_{11}} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{20}{2.8284} = 7.0711$$

$$l_{22} \rightarrow k = 2 \rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{j=1}^1 l_{kj}^2} \rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{80 - 7.0711^2} = 5.4772$$

Üçüncü satır için (k=3)

$$l_{31} \rightarrow k = 3, \quad i = 1 \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31} - \sum_{j=1}^0 l_{ij} l_{kj}}{l_{11}} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{15}{2.8284} = 5.3034$$

$$l_{32} \rightarrow k = 3, \quad i = 2 \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - \sum_{j=1}^1 l_{ij} l_{kj}}{l_{22}}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = \frac{50 - 7.0711 * 5.3034}{5.4772} = 2.2820$$

$$l_{33} \rightarrow k = 3 \rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{j=1}^2 l_{kj}^2} \rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

$$l_{33} = \sqrt{60 - 5.3034^2 - 2.2820^2} = 5.1640$$

Böylece Cholesky ayrıştırmasıyla aşağıdaki alt üçgen matris elde edilir

$$L = \begin{bmatrix} 2.8284 & & \\ 7.0711 & 5.4772 & \\ 5.3034 & 2.2820 & 5.1640 \end{bmatrix}$$

İleriye doğru çözümle D vektörü elde edilir.

$$[L]\{D\} = \{B\}$$

$$\begin{bmatrix} 2.8284 & & \\ 7.0711 & 5.4772 & \\ 5.3034 & 2.2820 & 5.1640 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 250 \\ 100 \end{Bmatrix} \rightarrow d_1 = 35.3557 \quad d_2 = 0.0007 \quad d_3 = -16.9456$$

Geriye doğru çözümle X vektörü bulunur.

$$[L]^T\{X\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 2.8284 & 7.0711 & 5.3034 \\ & 5.4772 & 2.2820 \\ & & 5.1640 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 35.3557 \\ 0.0007 \\ -16.9456 \end{Bmatrix} \rightarrow X = \begin{Bmatrix} -3.2815 \\ 1.3673 \\ 15.2349 \end{Bmatrix}$$

Thomas Algoritmasıyla Üçlü Köşegen Çözüm

$$\begin{bmatrix} 4.04 & -1 & & & \\ -1 & 4.04 & -1 & & \\ & -1 & 4.04 & -1 & \\ & & -1 & 4.04 & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 172.7408 \\ 188.35512 \\ 249.87552 \\ 519.7612 \end{Bmatrix}$$

ilk olarak ayrıştırma aşağıdaki gibi yerine getirilir.

$$e_2 = -1 / 4.04 = -0.248$$

$$f_2 = 4.04 - (-0.246)(-1) = 3.792$$

$$e_3 = -1 / 3.792 = -0.264$$

$$f_3 = 4.04 - (-0.264)(-1) = 3.776$$

$$e_4 = -1 / 3.776 = -0.265$$

$$f_4 = 4.04 - (-0.265)(-1) = 3.775$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & \\ & & e_4 & f_4 & g_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.04 & & -1 & & \\ -0.248 & & 3.792 & & -1 \\ & & -0.264 & & 3.776 & & -1 \\ & & & & -0.265 & & 3.775 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.04 & -1 & & \\ -0.248 & 3.792 & -1 & \\ & -0.264 & 3.776 & -1 \\ & & -0.265 & 3.775 \end{bmatrix}$$

L. U Ayrışması

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.248 & 1 & & \\ & -0.264 & 1 & \\ & & -0.265 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.04 & -1 & & \\ & 3.792 & -1 & \\ & & 3.776 & -1 \\ & & & 3.775 \end{bmatrix}$$

$$[L] \cdot [U] = [A]$$

L alt üçgen matris

ileri yönlü çözüm

$$[L]\{R\} = \{B\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.248 & 1 & & \\ & -0.264 & 1 & \\ & & -0.265 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 172.7408 \\ 188.3551 \\ 249.8756 \\ 519.7612 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} r_1 &= 172.7408 \\ r_2 &= 231.1948 \\ r_3 &= 310.9110 \\ r_4 &= 602.1526 \end{aligned}$$

sağ taraf vektörü



$$\{R\} = \begin{Bmatrix} 172.7408 \\ 231.1948 \\ 310.9110 \\ 602.1526 \end{Bmatrix}$$

U: Üst üçgen matris

$[U][T]=[R]$ Geriye doğru çözümlerle Bilinmeyenler bulunur.

$$\begin{bmatrix} 4.04 & -1 & & & \\ & 3.792 & -1 & & \\ & & 3.776 & -1 & \\ & & & 3.775 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 172.7408 \\ 231.1948 \\ 310.9110 \\ 602.1526 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} T_4 = 159.511 \\ T_3 = 124.5821 \\ T_2 = 93.8230 \\ T_1 = 65.9811 \end{matrix}$$