

En Küçük Kareler Regresyon, Genel Doğrusal EnKüçük Kareler, Doğrusal olmayan Regresyon [1]

Kaynaklar:

1. Chapra S.C. and Canale R.P. "Numerical Methods for Engineers", Sixth Edition, McGraw Hill, International Edition 2010.
2. Chapra S.C. and Canale R. P. "Yazılım ve programlama Uygulamalarıyla Mühendisler için Sayısal Yöntemler" 4.Basımdan Çevirenler: Hasan Heperkan ve Uğur Kesgin 2003.
3. Chapra S.C. "Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and Scientists" Third Edition, McGraw Hill, International Edition 2012.
4. Mathews J.H. and Fink K.D. "Numerical Methods using MATLAB", Fourth Edition, Pearson P. Hall, International Edition 2004.
5. Fausett L.V. "Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Second Edition, Pearson P. Hall, International Edition, 2008.
6. Gilat A. And Subramaniam V. "Numerical Methods, An introduction with Applications Using MATLAB", Second Edition, John Wiley and Sons. Inc. 2011.

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

Her iki tarafın doğal logaritması alınır.

$$\ln y = \ln \alpha + \beta x$$

Bu denklem $Y = a_1 X + a_0$ şeklinde $\ln \alpha$ a_0 'a ve β a_1 'e karşılık gelir.

$$\ln y = Y$$

$$\ln \alpha = a_0$$

$$\beta = a_1$$

$$x = X$$

X (x)	1300	1500	1600	1700	1800	1900
Y (ln y)	4.0943	4.3820	4.6540	5.0752	5.7038	6.1738

Aşağıdaki nicelikler hesaplanabilir

$$\sum X_i Y_i = 1300 * 4.0943 + 1500 * 4.382 + 1600 * 4.654 + 1700 * 5.0752 + 1800 * 5.7038 + 1900 * 6.1738 = 49966.89$$

$$\sum X_i^2 = 1300^2 + 1500^2 + 1600^2 + 1700^2 + 1800^2 + 1900^2 = 16240000$$

$$\sum X_i = 1300 + 1500 + 1600 + 1700 + 1800 + 1900 = 9800$$

$$\sum Y_i = 4.0943 + 4.382 + 4.654 + 5.0752 + 5.7038 + 6.1738 = 30.0831$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{9800}{6} = 1633.3333$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{30.0831}{6} = 5.0139$$

a_1 ve a_0 bulunması için aşağıdaki eşitlikler kullanılır

$$a_1 = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{6 * 49966.89 - 9800 * 30.0831}{6 * 16240000 - 9800^2} = 0.0036$$

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X} = 5.0139 - 0.0036 * 1633.3333 = -0.8661$$

Böylece En Küçük kareler regresyon sonucu $\hat{Y} = 0.0036X - 0.8661$

$Y = \ln y$ yerleştirmesiyle $\ln y = 0.0036x - 0.8661$ verir.

Böylece kesme, $\ln \alpha$, -0.8661 'e eşit olur ve dolayısıyla anti logaritması alınır

$$\ln \alpha = -0.8661 \rightarrow \alpha = 0.4206$$

$$\beta = a_1 = 0.0036$$

Sonunda eksponensiyel eşitliğimiz $y = 0.4206e^{0.0036x}$

Doğrusal En Küçük Kareler Regresyonu

$$y = a_1x + a_0$$

x_i	-6	-4	-1	0	3	5	8
y_i	15	12	8	4	1	-5	-14

$$\Sigma x_i = (-6) + (-4) + (-1) + 0 + 3 + 5 + 8 = 5$$

$$\Sigma y_i = 15 + 12 + 8 + 4 + 1 + (-5) + (-14) = 21$$

$$\Sigma x_i^2 = (-6)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 151$$

$$\Sigma x_i y_i = (-6) * 15 + (-4) * 12 + (-1) * 8 + 0 * 4 + 3 * 1 + 5 * (-5) + 8 * (-14) = -280$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{5}{7} = 0.7143$$

a_1 ve a_0 bulunması için aşağıdaki eşitlikler kullanılır

$$a_1 = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{7 * (-280) - 5 * 21}{7 * 151 - 5^2} = -2.0010$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = 3 - (-2.0010) * 0.7143 = 4.4293$$

Böylece En Küçük kareler doğruya uyar $y = -2.0010x + 4.4293$

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

y_i	$(y_i - \bar{y})^2$
15	$(15 - 0.7143)^2 = 204.0812$
12	$(12 - 0.7143)^2 = 127.3670$
8	$(8 - 0.7143)^2 = 53.0814$
4	$(4 - 0.7143)^2 = 10.7958$
1	$(1 - 0.7143)^2 = 0.0816$
-5	$(-5 - 0.7143)^2 = 32.6532$
-14	$(-14 - 0.7143)^2 = 216.5106$

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 644.5708$$

Doğrusal en küçük kareler regresyonu

the coefficients α and β in the function

x_i	-1.0	-0.3	0.2	1.0	2.0
y_i	2.8	4.4	4.6	2.7	1.2

α ve β katsayıları fonksiyon $y = \left(\frac{1}{\alpha x^2 + \beta}\right)^2$ içindedir.

Fonksiyon vermek için ters çevrilerek doğrusallaştırılır

$$y = \left(\frac{1}{\alpha x^2 + \beta} \right)^2$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{\alpha x^2 + \beta} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = \alpha x^2 + \beta \quad \text{or} \quad Y = a_1 X + a_0$$

Burada

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = Y$$

$$\alpha = a_1$$

$$x^2 = X$$

$$\beta = a_0$$

X (x ²)	1	0.09	0.04	1	4
Y ($\frac{1}{\sqrt{y}}$)	0.5976	0.4767	0.4663	0.6086	0.9129

Aşağıdaki değerler hesaplanabilir

$$\sum X_i Y_i = 1 * 0.5976 + 0.09 * 0.4767 + 0.04 * 0.4663 + 1 * 0.6086 + 4 * 0.9129 = 4.9194$$

$$\sum X_i^2 = 1^2 + 0.09^2 + 0.04^2 + 1^2 + 4^2 = 18.0097$$

$$\sum X_i = 1 + 0.09 + 0.04 + 1 + 4 = 6.13$$

$$\sum Y_i = 0.5976 + 0.4767 + 0.4663 + 0.6086 + 0.9129 = 3.0621$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{6.13}{5} = 1.226$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{3.0621}{5} = 0.6124$$

a_1 ve a_0 , aşağıdaki eşitlikten bulunur.

$$a_1 = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{5 * 4.9194 - 6.13 * 3.0621}{5 * 18.0097 - 6.13^2} = 0.1110$$

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X} = 0.6124 - 0.1110 * 1.226 = 0.4763$$

Böylece en küçük kareler regresyon denklemi elde edilir.

$$y = \left(\frac{1}{0.1110x^2 + 0.4763} \right)^2$$

EN KÜÇÜK KARELER REGRESYONU

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Katsayılar a_0 , a_1 ve a_2

$$\Sigma x_i = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\Sigma y_i = 2.3 + 7 + 14 + 27 = 50.3$$

$$\Sigma x_i^2 = (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = 14$$

$$\Sigma x_i^3 = (0)^3 + (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 = 36$$

$$\Sigma x_i^4 = (0)^4 + (1)^4 + (2)^4 + (3)^4 = 36 = 98$$

$$\Sigma x_i y_i = 0 \times 2.3 + 1 \times 7 + 2 \times 14 + 3 \times 27 = 116$$

$$\Sigma x_i^2 y_i = (0)^2 \times 2.3 + (1)^2 \times 7.0 + (2)^2 \times 14 + (3)^2 \times 27 = 306$$

Böylece matrisler,

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50.3 \\ 116 \\ 306 \end{Bmatrix}$$

Gauss_Yoketme yöntemiyle doğrusal eşitlik sisteminin çözümü

$$[6 \ 14 \ 36 \ 116] - \frac{6}{4}[4 \ 6 \ 14 \ 50.3] = [0 \ 5 \ 15 \ 40.55]$$

$$[14 \ 36 \ 98 \ 306] - \frac{14}{4}[4 \ 6 \ 14 \ 50.3] = [0 \ 15 \ 49 \ 129.95]$$

$$[0 \ 15 \ 49 \ 129.95] - \frac{15}{5}[0 \ 5 \ 15 \ 40.55] = [0 \ 0 \ 4 \ 8.3]$$

Üst üçgen matris geriye doğru çözümlerle çözülür

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50.3 \\ 40.55 \\ 8.3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_2 = 2.075 \\ a_1 = 1.885 \\ a_0 = 2.485 \end{matrix}$$

$$2.075 + 1.885x + 2.485x^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{50.3}{4} = 12.575$$

x_i	y_i	$S_t = (y_i - \bar{y})^2$	$S_r = (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$
0	2.3	109.7256	0.0342
1	7.0	31.0806	0.3080
2	14	2.0306	0.3080
3	27	208.0806	0.0342
Σ	50.3	350.9174	0.6844

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = 0.9980$$