MAT 109 ANALİZ I

Analize Giriş

Ankara Üniversitesi

2. Hafta

Tanım 1.3.1.

Aşağıdaki dört takım aksiyomu gerçekleyen $\mathbb{R}$ kümesine reel (gerçel) sayılar kümesi, elemanlarına da reel (gerçel) sayılar adı verilir.

(I) Toplama Aksiyomları

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

dönüşümü her $a,b,c\in\mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i)

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(ii)

$$a+b=b+a$$

(iii)

$$a+0=0+a=a$$

olacak şekilde $0\in\mathbb{R}$ elemanı vardır.

(iv)

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

olacak şekilde $-a\in\mathbb{R}$ elemanı vardır.

Not 1.3.2.

(i) , (ii) , (iii) ve (iv) özelliklerini sağlayan $(X, +)$ ikilisine değişmeli toplamsal grup (Abel grubu) denir. O halde $(\mathbb{R}, +)$ değişmeli toplamsal gruptur.

(II) Çarpma Aksiyomları

$$\begin{array}{cccc} . : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & x.y \end{array}$$

dönüşümü her $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i)

$$(a.b)\,.c=a.\,(b.c)$$

(ii)

$$a.b=b.a$$

(iii)

$$a.1=1.a=a$$

olacak şekilde $1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ elemanı vardır.

(iv)

$$a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$$

olacak şekilde $a^{-1}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ elemanı vardır.

Not 1.3.3.

$(i)\,,(ii)\,,(iii)$ ve (iv) özelliklerini sağlayan $(X,.)$ ikilisine değişmeli çarpımsal grup denir. O halde $(\mathbb{R},.)$ değişmeli çarpımsal gruptur.

(III) Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Soldan ve Sağdan Dağılma Özelliği

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
a.(b+c) &= a.b + a.c \\
(a+b).c &= a.c + b.c
\end{aligned}
$$

dir.

Not 1.3.4.

$(I)\,,(II)$ ve (III) özelliklerini sağlayan $(X,+,.)$ üçlüsüne cisim adı verilir. O halde $(\mathbb{R},+,.)$ üçlüsü cisimdir.

(IV) Sıralama Aksiyomları

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı herhangi $a, b, c \in \mathbb{R}$ elemanları için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i)

$$a \leq a$$

(ii)

$$a \leq b \text{ ve } b \leq a \Longrightarrow a = b$$

(iii)

$$a \leq b \text{ ve } b \leq c \Longrightarrow a \leq c$$

(iv)

$$a \leq b \text{ veya } b \leq a$$

Not 1.3.5.

$\mathbb{R}$ tam sıralanmış cisimdir.

(V) Toplama ve Sıralama İşlemleri Arasındaki İlişki

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$

dir.

(VI) Çarpma ve Sıralama İşlemleri Arasındaki İlişki

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$(a \leq b) \wedge (0 \leq c) \Longrightarrow a.c \leq b.c$$

dir.

(VII) Tamlık Aksiyomu

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olmak üzere $A, B \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için

$$a \leq b$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $a \in A$ ve her $b \in B$ için

$$a \leq c \leq b$$

olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ elemanı vardır.

Not 1.3.6.

$(I)-(VII)$ aksiyomlar takımı $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin çok az sayıda özelliklerini kapsamaktadır. Bunlara ek olarak reel sayıların çok fazla özelliği vardır.

Tanım 1.3.7.

$$a > 0$$

eşitsizliğini sağlayan a reel sayılarına pozitif reel sayılar,

$$a < 0$$

eşitsizliğini sağlayan a reel sayılarına negatif reel sayılar denir ve sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \\ \mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \end{aligned}$$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.8.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ alt kümesini dikkate alalım.
(i) Her $x \in X$ için

$$x \leq b$$

olacak şekilde en az bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesini üstten sınırlıdır denir ve b sayısına X kümesinin bir üst sınırı adı verilir.
(ii) Her $x \in X$ için

$$a \leq x$$

olacak şekilde en az bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa X kümesini alttan sınırlıdır denir ve a sayısına X kümesinin bir alt sınırı adı verilir.

(iii) X kümesi alttan ve üstten sınırlı, yani her $x \in X$ için

$$a \leq x \leq b$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları varsa, X kümesine sınırlı küme adı verilir.
(iv) Her $x \in X$ için

$$x \leq M$$

olacak şekilde $M \in X$ sayısı varsa M sayısına X kümesinin maksimal (en büyük) elemanı denir ve

$$M = \max \{x : x \in X\}$$

şeklinde gösterilir.

(v) Her $x \in X$ için

$$m \leq x$$

olacak şekilde $m \in X$ sayısı varsa m sayısına X kümesinin minimal (en küçük) elemanı denir ve

$$m = \min \{x : x \in X\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 1.3.9.

$$X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

kümesinin maksimal ve minimal elemanı yoktur. Ancak;

$$Y = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

kümesinin maksimal ve minimal elemanı vardır ve

$$\begin{aligned} \max Y &= 1 \\ \min Y &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Not 1.3.10.

(i) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı olduğunda

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ sayısı } X \text{ kümesinin alt sınırı}\}$$

kümesi boş küme değildir.
(ii) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı olduğunda

$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \text{ sayısı } X \text{ kümesinin üst sınırı}\}$$

kümesi boş küme değildir.

Tanım 1.3.11.

(i) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ sayısı } X \text{ kümesinin alt sınırı}\}$$

kümesinin maksimal elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı denir ve

$$\inf X$$

ile gösterilir.
(ii) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise

$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \text{ sayısı } X \text{ kümesinin üst sınırı}\}$$

kümesinin minimal elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı denir ve

$$\sup X$$

ile gösterilir.

Not 1.3.12.

Yukardaki tanıma göre

$$\begin{aligned} \inf X &= \max\{a \in \mathbb{R} : \forall x \in X \text{ için } a \leq x\} \\ \sup X &= \min\{b \in \mathbb{R} : \forall x \in X \text{ için } x \leq b\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 1.3.13.

(i) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve alttan sınırlı küme olsun. Bu durumda X kümesinin bir tek en büyük alt sınırı (infimumu) vardır.
(ii) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve üstten sınırlı küme olsun. Bu durumda X kümesinin bir tek en küçük üst sınırı (supremumu) vardır.

Teorem 1.3.14.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ sınırlı küme olsun.

$$\begin{aligned} i &= \inf X \\ s &= \sup X \end{aligned}$$

olmak üzere supremum ve infimum aşağıdaki karakteristik özelliğe sahiptir.

(i)

$$i = \inf X \iff \begin{array}{l} (1)\ \forall x \in X \text{ için } i \leq x, \\ (2)\ \forall \epsilon > 0 \text{ için } x_\epsilon < i + \epsilon \text{ olacak şekilde en az bir } x_\epsilon \in X \text{ elemanı vardır.} \end{array}$$

(ii)

$$s = \sup X \iff \begin{array}{l} (1)\ \forall x \in X \text{ için } x \leq s, \\ (2)\ \forall \epsilon > 0 \text{ için } s - \epsilon < x_\epsilon \text{ olacak şekilde en az bir } x_\epsilon \in X \text{ elemanı vardır.} \end{array}$$

Tanım 1.3.15.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun.

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

kümesine a başlangıçlı b bitimli açık aralık denir ve (a, b) şeklinde gösterilir.

Benzer olarak;

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

kümesine a başlangıçlı b bitimli kapalı aralık denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir.

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{ve} \quad \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

kümelerine sırasıyla a -da açık b -de kapalı ve a -da kapalı b -de açık yarı-açık aralık denir ve $(a, b]$, $[a, b)$ ile gösterilir.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \\
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\
(-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.3.16.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ ile gösterilen iki yeni sembolü ilave etmek suretiyle elde edilen

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

kümesine genelleştirilmiş reel sayılar sistemi adı verilir. Bu sayılar sisteminin aşağıdaki ifadeleri sağladığı kabul edilmektedir:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} x-(+\infty) &= x-\infty=-\infty \\ x+(+\infty) &= x+\infty=+\infty \\ x-(-\infty) &= x+\infty=+\infty \\ +\infty+(+\infty) &= +\infty \\ -\infty+(-\infty) &= -\infty \\ \frac{x}{-\infty} &= \frac{x}{+\infty}=0 \end{aligned}$$

dır.

(ii) $x > 0$ ise

$$\begin{aligned} x.(-\infty) &= -\infty \\ x.(+\infty) &= +\infty \\ \frac{x}{0} &= +\infty \end{aligned}$$

dur.

(iii) $x < 0$ ise

$$\begin{aligned} x.(-\infty) &= +\infty \\ x.(+\infty) &= -\infty \\ \frac{x}{0} &= -\infty \end{aligned}$$

dur.

Not 1.3.17.

$\emptyset \neq X \subset \bar{\mathbb{R}}$ alt kümesi verilsin. Eğer X kümesi alttan sınırlı değilse

$$\inf X = -\infty$$

; eğer X kümesi üstten sınırlı değilse

$$\sup X = +\infty$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.3.18.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$$

kümesi için

$$\sup B, \quad \inf B$$

ve

$$\min B, \quad \max B$$

değerlerini bulunuz.

Örnek 1.3.19.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi için

$$\inf A, \ \sup A$$

ve

$$\min A, \ \max A$$

değerlerini bulunuz.

Örnek 1.3.20.

$$X = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi için

$$\inf X, \ \ \sup X$$

ve

$$\min X, \ \ \max X$$

değerlerini bulunuz.

Tanım 1.3.21.

$x \in \mathbb{R}$ reel sayısının mutlak değeri

$$x \to |x| = \begin{cases} -x & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Mutlak değerin aşağıdaki özellikleri vardır.

Teorem 1.3.22.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|x| \geq 0$$

dır.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x.y| = |x| \, . \, |y|$$

ve $y \neq 0$ olmak üzere

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

dir.

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x \mp y| \leq |x| + |y|$$

dir.

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

dir.

(v) $a > 0$ olmak üzere

$$|x| \leq a \Longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \Longrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$$

dır.

Teorem 1.3.23.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun.
(i) $\forall \epsilon > 0$ için

$$x < y + \epsilon$$

ise

$$x \leq y$$

dir.

(ii) $\forall \epsilon > 0$ için

$$x > y - \epsilon$$

ise

$$x \geq y$$

dir.
(iii) $\forall \epsilon > 0$ için

$$|x| < \epsilon$$

ise

$$x = 0$$

dır.

1.4.1. Doğal Sayılar

Tanım 1.4.1.

$$1,\ 1+1,\ (1+1)+1, ...$$

formundaki sayılar sırasıyla

$$1, 2, 3, ...$$

ile gösterilir. Bu sayılara doğal sayılar denir ve doğal sayılar kümesi

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, n+1, ...\}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 1.4.2.

n doğal sayısına bağlı $B(n)$ bağıntısı için

$$\begin{array}{lll} (i) & B(1) \text{ doğru,} & \\ (ii) & B(n) \text{ doğru olduğunda} & B(n+1) \text{ doğru} \end{array}$$

oluyorsa $B(n)$ bağıntısı bütün doğal sayılar için doğrudur.

Yukardaki teoremde belirtilen ispat tekniğine Matematik İndüksiyon (Tümevarım) yöntemi adı verilir.

Örnek 1.4.3.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \neq 1$ olmak üzere

$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

olduğunu gösteriniz.

1.4.2. Tam Sayılar

Tanım 1.4.4.

Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$n + x = n$$

denkleminin tek çözümü 0 (sıfır) ile

$$n + x = 0$$

denkleminin tek çözümü $-n$ elemanlarını $\mathbb{N}$ kümesine ilave ederek elde edilen

$$\mathbb{Z} = \{..., -(n+1), -n, ..., -2 - 1, 0, 1, 2, ..., n, n+1, ...\}$$

kümesine tamsayılar kümesi adı verilir.

1.4.3. Rasyonel Sayılar

Tanım 1.4.5.

$n \neq 0$ olmak üzere $m, n \in \mathbb{Z}$ ise

$$m.n^{-1} = \frac{m}{n}$$

şeklindeki sayıya rasyonel sayı ve bu sayıların oluşturduğu kümeye rasyonel sayılar kümesi adı verilir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Teorem 1.4.6.

Rasyonel olmayan sayı vardır.

Tanım 1.4.7.

Rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir ve irrasyonel sayılar kümesi

$$\mathbb{I}$$

ile gösterilir.

Teorem 1.4.8. (Archimedes Prensibi)

$\forall h > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$(k_0 - 1)\, h \leq x < k_0 h$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır.

Sonuç 1.4.9.

$\forall \epsilon > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Sonuç 1.4.10.

Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır.

Tanım 1.4.11.

$a \in \mathbb{R}$ noktası ve $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : a-\epsilon < x < a+\epsilon\}$$

açık aralığına a noktasının ϵ komşuluğu denir ve

$$U_\epsilon(a)$$

ile gösterilir.

$$U_\epsilon(a) \setminus \{a\}$$

kümesine a noktasının delinmiş ϵ komşuluğu adı verilir ve

$$\mathring{U}_\epsilon(a)$$

ile gösterilir.

Örneğin;

$$U_{\frac{1}{2}}(0) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\mathring{U}_{\frac{1}{2}}(0) = \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$U_{\frac{1}{3}}(-1) = \left(-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\mathring{U}_{\frac{1}{3}}(-1) = \left(-\tfrac{4}{3}, -1\right) \cup \left(-1, -\tfrac{2}{3}\right)$$

olduğu açıktır.

Tanım 1.4.12.

$E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. a sayısının her $\mathring{U}_\epsilon(a)$ delinmiş komşuluğunda E kümesinin en az bir elemanı varsa a noktasına E kümesinin limit (yığılma) noktası denir ve E kümesinin yığılma noktalarının kümesi

$$E'$$

ile gösterilir.

$$a \in E' \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ için } E \cap \mathring{U}_\epsilon(a) \neq \emptyset$$

Örnek 1.4.13.

$$E = (0, 1]$$

olmak üzere E kümesinin E' yığılma noktalar kümesini bulunuz.

Tanım 1.4.14.

$E \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $a \in E$ ve a noktası E kümesinin limit noktası değilse a noktasına E kümesinin izole noktası adı verilir ve E kümesinin izole noktalarının kümesi

$$izole\,(E)$$

ile gösterilir.

$$a \in izole\,(E) \iff a \in E \text{ ve } \exists\delta > 0 \text{ için } E \cap \mathring{U}_\delta\,(a) = \emptyset$$

Örnek 1.4.15.

$$E = [-1,1] \cup \{2\}$$

olmak üzere E kümesinin izole noktalar kümesini bulunuz.

Teorem 1.4.16.

$E \subset \mathbb{R}$ sınırlı küme olsun.

$$\begin{array}{rcl} (a)\ \ \sup E & = & s \notin E \text{ ise } s \in E' \text{ dır.} \\ (b)\ \ \inf E & = & i \notin E \text{ ise } i \in E' \text{ dır.} \end{array}$$

Tanım 1.4.17.

$a \in \mathbb{R}$ olsun. a sayısından büyük olmayan tam sayıların en büyüğüne a sayısının tam kısmı denir ve

$$[\![a]\!]$$

sembolü ile gösterilir.
Örneğin;

$$\begin{aligned} [\![2.5]\!] &= 2 \\ [\![-3.7]\!] &= -4 \\ [\![1]\!] &= 1 \end{aligned}$$

dir.

Not 1.4.18.

$a \in \mathbb{R}$ için

$$a = [\![a]\!] + t$$

olacak şekilde $t \in [0,1)$ sayısı vardır.

Not 1.4.19.

Tam değer ifadesinin aşağıdaki özellikleri vardır:
(i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$[\![a+b]\!] \geq [\![a]\!] + [\![b]\!]$$

dir.
(ii) $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $a \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$[\![a+m]\!] = [\![a]\!] + m$$

dir.

Teorem 1.4.20.

$a_0 \neq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$ için

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

denklemi verilsin. Eğer denklemin

$$\frac{p}{q}$$

şeklinde rasyonel kökü mevcut ise a_n katsayısı p sayısı ile a_0 katsayısı da q sayısı ile tam bölünebilir.