MAT 109 ANALİZ I

Limit

Ankara Üniversitesi

4. Hafta

Tanım 2.1.1.

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan her f fonksiyonuna dizi adı verilir. O halde bir dizi

$$f : \mathbb{N} \to X$$

şeklinde bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f : \underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{x_n = f(n) \in X}{X}$$

olarak yazılabilir. $x_n \in X$ elemanına dizinin genel terimi (veya n -inci terimi) adı verilir ve bu dizi kısaca (x_n) ile gösterilir. $X \subset \mathbb{R}$ olması durumunda (x_n) dizisine reel sayı dizisi adı verilir.

Tanım 2.1.2.

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesine (x_n) dizisinin değer kümesi adı verilir ve

$$\mathcal{R}\left(x_n\right)$$

ile gösterilir.

Not 2.1.3.

Bir dizinin değer kümesi sonlu veya sonsuz elemanlı küme olabilir. Örneğin; $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n \\ y_n &= n^{(-1)^n} \end{aligned}$$

genel terimleri ile tanımlı (x_n) ve (y_n) dizilerinin değer kümeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x_n) &= \{-1, 1\} \\ \mathcal{R}(y_n) &= \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, ..., \frac{1}{2n-1}, 2n, \frac{1}{2n+1}, ...\right\} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.1.4.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \leq b$$

olacak şekilde $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi üstten sınırlıdır denir. b sayısına da (x_n) dizisinin bir üst sınırı denir.
(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a \leq x_n$$

olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi alttan sınırlıdır denir. a sayısına da (x_n) dizisinin bir alt sınırı denir.
(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a \leq x_n \leq b$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları varsa (x_n) dizisi sınırlıdır denir.

Not 2.1.5.

Başka bir ifade ile; eğer (x_n) dizisinin

$$\mathcal{R}(x_n)$$

değer kümesi üstten sınırlı bir küme ise (x_n) dizisine üstten sınırlı dizi,

$$\mathcal{R}(x_n)$$

değer kümesi alttan sınırlı bir küme ise (x_n) dizisine alttan sınırlı dizi,

$$\mathcal{R}(x_n)$$

değer kümesi sınırlı bir küme ise (x_n) dizisine sınırlı dizi adı verilir.

Örnek 2.1.6.

(a) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n = 2 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

genel terimli (x_n) dizisi sınırlıdır. Gösteriniz.
(b) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n = -n$$

genel terimli (x_n) dizisi üstten sınırlıdır. Gösteriniz.
(c) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n = n^{(-1)^n}$$

genel terimli (x_n) dizisi alttan sınırlıdır. Gösteriniz.

Tanım 2.1.7.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(a) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1}$$

ise (x_n) dizisine artan dizi denir.
(b) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq x_{n+1}$$

ise (x_n) dizisine azalmayan dizi denir.

(c) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} < x_n$$

ise (x_n) dizisine azalan dizi denir.
(d) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} \leq x_n$$

ise (x_n) dizisine artmayan dizi denir.

Tanım 2.1.8.

(x_n) reel sayı dizisi yukarda belirtilen tipteki dizilerden biri ise (x_n) dizisine monoton dizi adı verilir.

Tanım 2.1.9.

(x_n) reel sayı dizisi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$n_k < n_{k+1}$$

olacak şekilde (n_k) doğal sayı dizisi ise

$$(x_{n_k})$$

dizisine (x_n) dizisinin alt dizisi denir.

Örneğin;

$$(x_n) = \left(n^{(-1)^n}\right)$$

dizisini dikkate alalım:
$n_k = 2k$ için

$$x_{n_k} = x_{2k} = 2k$$

olup

$$(x_{n_k}) = (2k)$$

dizisi (x_n) dizisinin alt dizisidir.
$n_k = 2k-1$ için

$$x_{n_k} = x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$$

olup

$$(x_{n_k}) = \left(\frac{1}{2k-1}\right)$$

dizisi (x_n) dizisinin alt dizisidir.

Tanım 2.1.10.

(x_n) reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimleri a sayısının

$$U_\epsilon(a)$$

komşuluğunda bulunuyorsa (x_n) dizisi a sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{veya} \qquad x_n \to a \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir.

Yukarda verilen tanıma denk olan şu tanımı verebiliriz.

Tanım 2.1.11.

(x_n) reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$|x_n - a| < \epsilon$$

sağlanıyor ise (x_n) dizisi a sayısına yakınsaktır denir.

Not 2.1.12.

Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \;\ni\; \forall n > n_0 \;\; (|x_n - a| < \epsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \Longleftrightarrow \exists\epsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \;\ni\; \exists n > n_0 \;\; (|x_n - a| \geq \epsilon)$$

Örnek 2.1.13.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.14.

$$(x_n) = ((-1)^n)$$

dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.15.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.16.

$a \in \mathbb{R}$ ve $|a| < 1$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Tanım 2.1.17.

(x_n) ve (y_n) reel sayı dizisi olsun.

$$(x_n + y_n)\,,\ \ (x_n - y_n)\,,\ \ (x_n . y_n)$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ olduğunda

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

dizilerine sırasıyla (x_n) ve (y_n) dizilerinin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü denir.

Teorem 2.1.18.

$\mathbb{R}$ reel sayılar içinde yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

Teorem 2.1.19.

$\mathbb{R}$ reel sayılar içinde yakınsak her dizi sınırlıdır.

Not 2.1.20.

Teorem 2.1.19 da ifade edilen önermenin karşıtı doğru değildir. Gerçekten

$$(x_n) = ((-1)^n)$$

dizisini dikkate alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| = |(-1)^n| = 1$$

olduğundan (x_n) dizisi sınırlıdır. Ancak bu (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Teorem 2.1.21.

(x_n), (y_n) reel sayı dizileri yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

olsun. Bu durumda
(i) $(x_n + y_n)$ dizisi de yakınsak olup

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$$

dir.

(ii) $(x_n - y_n)$ dizisi de yakınsak olup

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$$

dir.
(iii) $(x_n.y_n)$ dizisi de yakınsak olup

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$$

dir.

Not 2.1.22.

Teorem 2.1.21 de ifade edilen önermelerin karşıtı doğru değildir. Gerçekten

$$(x_n) = \left((-1)^n\right) \quad \text{ve} \quad (y_n) = \left((-1)^{n-1}\right)$$

dizilerini dikkate alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= (-1)^n + (-1)^{n-1} = 0 \\ x_n y_n &= (-1)^n . (-1)^{n-1} = -1 \end{aligned}$$

olup $(x_n + y_n)$ ve $(x_n y_n)$ dizileri yakınsaktır ancak (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak değildir.

Lemma 2.1.23.

(z_n) reel sayı dizisi olsun. Eğer $d \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} z_n = d$$

ise $n_0 = n_0(d) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n > n_0$ için

$$|z_n| > \frac{|d|}{2}$$

sağlanır.

Teorem 2.1.24.

(x_n), (y_n) reel sayı dizileri yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad (b \neq 0)$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

dir.

Not 2.1.25.

Teorem 2.1.24 de ifade edilen önermenin karşıtı doğru değildir. Gerçekten

$$(x_n) = ((-1)^n) \quad \text{ve} \quad (y_n) = \left((-1)^{n-1}\right)$$

dizilerini dikkate alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}} = -1$$

olup $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi yakınsaktır ancak (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak değildir.

Teorem 2.1.26.

(x_n) , (y_n) ve (z_n) reel sayı dizileri olmak üzere her $n > n_0$ için

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

dır.

Örnek 2.1.27.

$$x_n = \frac{1}{n}\sin\left(n^2+3\right)$$

genel terimi ile verilen (x_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Tanım 2.1.28.

(x_n) reel sayı dizisi ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ise (x_n) dizisine sonsuz küçük dizi adı verilir.

Tanım 2.1.29.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(a) Eğer her $M \in \mathbb{R}$ sayısı için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n > M$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa (x_n) dizisinin limiti $+\infty$ dur denir ve

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \quad \text{veya} \quad x_n \to +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.

(b) Eğer her $M \in \mathbb{R}$ sayısı için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n < M$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa (x_n) dizisinin limiti $-\infty$ dur denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{veya} \quad x_n \to -\infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.

(c) Eğer her $M \in \mathbb{R}$ sayısı için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| > M$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa (x_n) dizisine sonsuz büyük dizi adı verilir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{veya} \quad x_n \to \infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.

Not 2.1.30.

Sonsuz büyük diziler yakınsak dizi olarak dikkate alınmayacaktır.

Not 2.1.31.

Yukarda verilen tanımlar simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x_n \to +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni\ \forall n > n_0 \ (x_n > M)$$

$$x_n \to -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni\ \forall n > n_0 \ (x_n < M)$$

$$x_n \to \infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni\ \forall n > n_0 \ (|x_n| > M)$$

Örnek 2.1.32.

$$x_n = 2^n$$

genel terimli (x_n) dizisinin sonsuz büyük bir dizi olduğunu gösteriniz.

Not 2.1.33.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

olmak üzere

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

dizisi

(i) Yakınsak olabilir. Örneğin;

$$x_n = \frac{5}{n} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{n}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 5$$

olup $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi yakınsaktır.

(ii) Sınırlı fakat ıraksak olabilir. Örneğin;

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{n}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

olup $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi ıraksak ve sınırlıdır.

(iii) Sonsuz küçük olabilir. Örneğin;

$$x_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{n}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

olup $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sonsuz küçük dizidir.

(iv) Sonsuz büyük olabilir. Örneğin;

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{5}{n^2}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

olup $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sonsuz büyük dizidir.

Böylece; eğer (x_n) ve (y_n) dizileri sonsuz küçük diziler ise

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur.

(b) Eğer (x_n) ve (y_n) dizileri sonsuz büyük diziler ise

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur.

(c) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty \quad (\text{veya } \mp\infty)$$

ise

$$(x_n y_n)$$

dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $(x_n y_n)$ dizisi $0.\infty$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur.

(d) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

ise

$$(x_n + y_n)$$

dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $(x_n + y_n)$ dizisi $\infty - \infty$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur.

Örnek 2.1.34.

$0 < \alpha < 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left[(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}\right] = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.35.

$$x_n = \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3}$$

genel terimli (x_n) dizisinin limitini bulunuz.

Şimdi

$$\frac{\infty}{\infty}$$

şeklinde belirsizliğe sahip ifadelerin limitinin hesaplanmasında sık kullanılan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.36. (Stolz Teoremi)

(x_n), (y_n) reel terimli dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

ve (y_n) artan dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \in \mathbb{R}$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$$

dir.

Sonuç 2.1.37.

(a_n) reel sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$$

gerçeklenir.

Örnek 2.1.38.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1.1! + 2.2! + ... + n.n!}{(n+1)!} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Sonuç 2.1.39.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = a$$

gerçeklenir.

Sonuç 2.1.40.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} = a$$

gerçeklenir.

Sonuç 2.1.41.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = r$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n} = r$$

dir.

Örnek 2.1.42.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Teorem 2.1.43.

(x_n) reel sayı dizisi olmak üzere (x_n) dizisinin keyfi alt dizisi (x_{n_k}) olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

dır (Yani; yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır).

Teorem 2.1.44.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(i) (x_n) dizisi monoton artan ve üstten sınırlı dizi ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{R}\,(x_n)$$

dir.
(ii) (x_n) dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı dizi ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{R}\,(x_n)$$

dir.

Örnek 2.1.45.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ifadesinin mevcut olduğunu gösteriniz.

Not 2.1.46.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$2 \leq x_n < 3$$

olduğundan (x_n) dizisinin limiti 2 ile 3 arasında bir reel sayıdır. Bu sayı e ile gösterilir ve değeri yaklaşık olarak

$$e = 2.718281828459045...$$

dır. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

dir.

Tanım 2.1.47.

(I_n) kapalı aralıkların dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$I_{n+1} \subset I_n$$

ise (I_n) dizisine iç içe aralıklar dizisi denir.

Sonuç 2.1.48. (İçiçe Aralıklar Özelliği)

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$I_{n+1} \subset I_n$$

olmak üzere (I_n) kapalı ve sınırlı aralıkların dizisi olsun. Bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

dir.

Teorem 2.1.49. (Bolzano-Weierstrass)

$\mathbb{R}$ reel sayıların sınırlı ve sonsuz elemanlı her alt kümesinin en az bir yığılma (limit) noktası vardır.

Sonuç 2.1.50. (Bolzano-Weierstrass)

Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

Tanım 2.1.51.

(x_n) reel sayı dizisi olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $m, n > n_0$ koşulunu sağlayan her $m, n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$|x_m - x_n| < \epsilon$$

sağlanıyor ise (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Yukarda verilen tanım simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(x_n) \text{ Cauchy dizisidir} \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \ni \ \forall m, n > n_0 \ \ (|x_m - x_n| < \epsilon)$$

$$(x_n) \text{ Cauchy dizisi değildir} \iff \exists \epsilon > 0 \ \ni \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists m, n > n_0 \ \ (|x_m - x_n| \geq \epsilon)$$

Örnek 2.1.52.

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$$

dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.53.

$$(x_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.54.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

genel terimine sahip (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olmadığını gösteriniz.

Teorem 2.1.55.

(x_n) Cauchy dizisi ise (x_n) dizisi sınırlıdır.

Teorem 2.1.56.

(x_n) reel terimli Cauchy dizisi olmak üzere (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

olsun. Bu durumda (x_n) dizisi yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

dır.

Teorem 2.1.57.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.

$$(x_n) \text{ dizisi yakınsaktır} \iff (x_n) \text{ dizisi Cauchy dizisidir.}$$

Not 2.1.58.

(x_n) Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $m, n > n_0$ koşulunu sağlayan her $m, n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$\left| x_m - x_n \right| < \epsilon$$

gerçeklenir. Keyfi $p \in \mathbb{N}$ için $m = n + p$ alınırsa yukardaki önerme şu şekli alır:
(x_n) Cauchy dizisi ise her $\epsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ sayısı ve her $p \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| < \epsilon$$

sağlanır.

Dolayısıyla eğer (x_n) Cauchy dizisi ise her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left| x_{n+p} - x_n \right| = 0$$

gerçeklenir. Ancak bu önermenin karşıtı doğru değildir. Yani; her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left| x_{n+p} - x_n \right| = 0$$

olması (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Tanım 2.1.59.

(x_n) dizisinin bir alt dizisi (x_{n_k}) olsun.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

ise a sayısına (x_n) dizisinin bir limit noktası denir.

Tanım 2.1.60.

(x_n) reel sayı dizisi ve

$$Z = \{x : x \text{ sayısı } (x_n) \text{ dizisinin limit noktası}\}$$

olsun.

$$L = \sup Z \qquad \text{ve} \qquad l = \inf Z$$

sayılarına sırasıyla (x_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir ve

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup x_n \\ l &= \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n = \liminf x_n \end{aligned}$$

ile gösterilir.

Not 2.1.61.

Her (x_n) dizisi için

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

olduğu açıktır.

(x_n) reel sayı dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} L_n &= \sup\{x_k : k \geq n\} = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} \\ l_n &= \inf\{x_k : k \geq n\} = \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 2.1.62.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} L_n \\ l &= \lim_{n\to\infty} l_n \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.1.63.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = a$$

Örnek 2.1.64.

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

genel terimine sahip (x_n) dizisi için $\inf x_n = \inf \mathcal{R}(x_n)$, $\sup x_n = \sup \mathcal{R}(x_n)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ve $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ değerlerini bulunuz.

Örnek 2.1.65.

(i) $x_n = n^{(-1)^n}$ genel terimine sahip (x_n) dizisinin alt ve üst limitini bulunuz.
(ii) $y_n = n$ genel terimine sahip (y_n) dizisinin alt ve üst limitini bulunuz.