MAT 109 ANALİZ I

Süreklilik

Ankara Üniversitesi

6. Hafta

Tanım 3.1.1.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon)$ sayısı var öyle ki

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir denir.

Not 3.1.2.

Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir $\Longleftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \; \ni \; \forall x \in X \; \left(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \right)$$

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında sürekli değildir $\Longleftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in X \; \left(|x - a| < \delta \; \wedge \; |f(x) - f(a)| \geq \epsilon \right)$$

Tanım 3.1.3.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon)$ sayısı var öyle ki her

$$x \in U_\delta(a) \cap X$$

için

$$f(x) \in U_\epsilon(f(a))$$

sağlanıyorsa f fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir denir.

Tanım 3.1.4.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde süreklidir denir.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekliliği için verilen Tanım 3.1.1 -de verilen ifadeye denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.5.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

oluyorsa f fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir denir.

Örnek 3.1.6.

$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x - 1}$$

fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 1)$ noktasında süreklidir. Gösteriniz.

Örnek 3.1.7.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli değildir. Gösteriniz.

Tanım 3.1.8.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası için

$$f\left(a^{-}\right) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) \qquad \text{ve} \qquad f\left(a^{+}\right) = \lim_{x \to a^{+}} f(x)$$

ifadeleri mevcut olsun.
(i) $f\left(a^{-}\right) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında soldan süreklidir denir.
(ii) $f\left(a^{+}\right) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında sağdan süreklidir denir.

Örnek 3.1.9.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = [\![x]\!]$$

fonksiyonu her $a \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağdan sürekli olup soldan sürekli değildir.

Not 3.1.10.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$f\left(a^{-}\right) = f(a) = f\left(a^{+}\right)$$

olmasıdır.

Tanım 3.1.11.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreksiz olsun.
(i)

$$f\left(a^{-}\right) = f\left(a^{+}\right) \neq f\left(a\right)$$

ise a noktasına f fonksiyonunun kaldırılabilir süreksizlik noktası denir.
(ii) $f\left(a^{-}\right)$ ve $f\left(a^{+}\right)$ sonlu limitleri mevcut ve

$$f\left(a^{-}\right) \neq f\left(a\right) \quad \text{ya da} \quad f\left(a^{+}\right) \neq f\left(a\right)$$

ise a noktasına f fonksiyonunun sıçramalı süreksizlik noktası denir.
(iii) $f\left(a^{-}\right)$ ve $f\left(a^{+}\right)$ ifadelerinden en az biri $+\infty$ (veya $-\infty$) veya mevcut değilse a noktasına f fonksiyonunun sonsuz süreksizlik noktası denir.

Örnek 3.1.12.

(i) $a = 0$ noktası

$$f(x) = sgnx$$

fonksiyonunun sıçramalı süreksizlik noktasıdır.
(ii) $a = 1$ noktası $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & ; \quad x \neq 1 \\ 0 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun sonsuz süreksizlik noktasıdır.
(iii) $a = 0$ noktası $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = |sgnx|$$

fonksiyonunun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

Not 3.1.13.

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu (a,b) açık aralığının her noktasında sürekli, a noktasında sağdan ve b noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir denir.

Tanım 3.1.14.

$\emptyset\neq X\subset\mathbb{R}$ küme ve $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun X kümesindeki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonuna X kümesi üzerinde parçalı süreklidir denir.