MAT 109 ANALİZ I

Süreklilik

Ankara Üniversitesi

7. Hafta

Teorem 3.2.1.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ kümesi ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer $a \in X$ noktasında f ve g fonksiyonları sürekli ise

(i) $|f|$

(ii) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere cf

(iii) $f \mp g$

(iv) $f.g$

(v) $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$

fonksiyonları da $a \in X$ noktasında süreklidir.

Teorem 3.2.2.

$\emptyset \neq X, Y \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : X \to Y \quad \text{ve} \quad g : Y \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu $a \in X$ noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $b = f(a)$ noktasında sürekli ise

$$g \circ f : X \to \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

bileşke fonksiyonu da $a \in X$ noktasında süreklidir.

Teorem 3.2.3. (Ara Değer Teoremi)

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyon, $A \neq B$ olmak üzere

$$f(a) = A \qquad \text{ve} \qquad f(b) = B$$

olsun. Bu durumda A ile B arasındaki her C sayısı için

$$f(c) = C$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır.

Sonuç 3.2.4. (Bolzano-Cauchy Teoremi)

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu sürekli ve

$$f(a).f(b) < 0$$

olsun. Bu durumda

$$f(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ sayısı mevcuttur.

Not 3.2.5.

Teorem 3.2.3 ve Sonuç 3.2.4 -ün hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim:

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = [\![x]\!] - \frac{1}{3}$$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreksizdir.

$$f(0) = -\frac{1}{3} < 0 \quad \text{ve} \quad f(1) = \frac{2}{3} > 0$$

olmasına rağmen

$$f(c) = 0$$

eşitliğini sağlayan $c \in (0,1)$ sayısı yoktur.

(b) $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

fonksiyonu

$$[0,1] \cup [2,3]$$

kümesi üzerinde süreklidir.

$$f(0) = -1 < 0 \qquad \text{ve} \qquad f(3) = 1 > 0$$

olmasına rağmen

$$f(c) = 0$$

eşitliğini sağlayan $c \in [0,1] \cup [2,3]$ sayısı yoktur.

Teorem 3.2.6.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır.

Teorem 3.2.7.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında en küçük ve en büyük değerini alır, yani

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(\alpha)$$

ve

$$M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(\beta)$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in [a,b]$ sayıları vardır.

Not 3.2.8.

Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.7 teoremlerinin hipotezlerindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

(a) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=x$$

fonksiyonu $(0,1)$ aralığında süreklidir ancak f fonksiyonu $(0,1)$ aralığında

$$\begin{aligned} M &= \sup\{x : x\in(0,1)\}=1 \\ m &= \inf\{x : x\in(0,1)\}=0 \end{aligned}$$

değerlerine ulaşamaz. Çünkü her $x\in(0,1)$ için

$$0<f(x)<1$$

dir. Bunun sebebi tanım kümesinin kapalı bir aralık olmaması dır.

(b) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} |x| & ; \quad x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ \frac{1}{2} & ; \quad x = 0 \text{ ya da } x = \mp 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli değildir.

$$\begin{aligned} M &= \sup \{f(x) : x \in [-1,1]\} = 1 \\ m &= \inf \{f(x) : x \in [-1,1]\} = 0 \end{aligned}$$

olup her $x \in [-1,1]$ için

$$f(x) \neq 0 \qquad \text{ve} \qquad f(x) \neq 1$$

dir. Dolayısıyla f fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında en büyük ve en küçük değerine ulaşamaz. Bunun sebebi f fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında sürekli fonksiyon olmamasıdır.

(c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \arctan x$$

fonksiyonu $[0, +\infty)$ aralığında sürekli fonksiyondur.

$$M = \sup\{\arctan x : x \in [0, +\infty)\} = \frac{\pi}{2}$$

olup her $x \in [0, +\infty)$ için

$$f(x) \neq \frac{\pi}{2}$$

dir. Yani f fonksiyonu $[0, +\infty)$ aralığında en büyük değerine ulaşamaz. Bunun sebebi f fonksiyonunun tanım kümesinin sınırlı olmamasıdır.

Tanım 3.3.1.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon)$ sayısı var öyle ki

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $x_1, x_2 \in X$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir.

Not 3.3.2.

Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir $\Longleftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \; \ni \; \forall x_1, x_2 \in X \; \left(|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \right)$$

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir $\Longleftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_1, x_2 \in X \; \left(|x_1 - x_2| < \delta \; \wedge \; |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon \right)$$

Not 3.3.3.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün sürekli ise süreklidir. Gerçekten; Tanım 3.3.1 -de

$$x_1 = x \qquad \text{ve} \qquad x_2 = a$$

alınırsa Tanım 3.1.1 elde edilir. Ancak sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olmayabilir.

Örnek 3.3.4.

$$f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$$

olmak üzere

$$f(x) = \sqrt{x}$$

fonksiyonunun $[1, +\infty)$ aralığında düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Teorem 3.3.5.

$X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. f foksiyonunun X kümesinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n, y_n \in X$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

koşullarını sağlayan keyfi (x_n) ve (y_n) dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$$

olmasıdır.

Not 3.3.6.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir.$\Longleftrightarrow$Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n, y_n \in X$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$$

koşullarını sağlayan (x_n) ve (y_n) dizileri için

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$$

olmasıdır.

Örnek 3.3.7.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x) = x^2$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir. Gösteriniz.

Örnek 3.3.8.

$$f:(0,1)\to(-\infty,0)$$

olmak üzere

$$f(x)=\ln x$$

fonksiyonu $(0,1)$ aralığında düzgün sürekli değildir. Gösteriniz.

Teorem 3.3.9.

Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında düzgün süreklidir.