MAT 109 ANALİZ I

Türev

Ankara Üniversitesi

8. Hafta

Tanım 4.1.1.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve

$$f:(a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (a,b)$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A(x_0)$$

ifadesi sonlu sayı ise $A(x_0)$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve

$$f'(x_0) \quad \text{veya} \quad Df(x_0) \quad \text{veya} \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

ile gösterilir.

Bu durumda f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir ve

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.1}$$

şeklindedir.

Not 4.1.2.

(4.1) ifadesinde $x = x_0 + h$ denirse

$$x \to x_0 \Longleftrightarrow h \to 0$$

olacağından

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 4.1.3.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu (a,b) aralığının her noktasında türevlenebilir ise $y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilirdir denir ve

$$f' \quad \text{veya} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx}$$

ile gösterilir.

Not 4.1.4.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir ise

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyon elde edilir ve bu fonksiyona türev fonksiyonu adı verilir.

Tanım 4.1.5.

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (a, b)$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A\left(x_0^+\right)$$

ve

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A\left(x_0^-\right)$$

limitleri sonlu sayı ise $A\left(x_0^+\right)$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağ türevi, $A\left(x_0^-\right)$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sol türevi denir ve

$$f'\left(x_0^+\right) \quad \text{ve} \quad f'\left(x_0^-\right)$$

ile gösterilir.

Not 4.1.6.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun x_0 noktasında sağ türevi ve sol türevi mevcut olsun. Bu durumda

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{veya} \quad f'\left(x_0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ve

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{veya} \quad f'\left(x_0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olarak da ifade edilebilir.

Not 4.1.7.

Sağ limit ve sol limit ile ilgili Teorem 2.2.16 göz önüne alınırsa aşağıdaki sonucun doğru olduğu görülür.

Teorem 4.1.8.

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun bir x_0 noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right)$$

olmasıdır. Bu durumda

$$f'\left(x_0\right) = f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right)$$

şeklindedir.

Not 4.1.9.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir, a noktasında sağdan türevlenebilir ve b noktasında soldan türevlenebilir ise f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında türevlenebilirdir denir.

Örnek 4.1.10.

$m,n \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = mx + n$$

olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = m$$

dir. Gösteriniz.

Örnek 4.1.11.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = |x|$$

olsun. f fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında türevlenemezdir. Gösteriniz.

Teorem 4.1.12.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Not 4.1.13.

Teorem 4.1.12 -de ifade edilen önermenin karşıtı genel olarak doğru değildir. Yani; bir fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda fonksiyon türevli olmayabilir. Bunun için Örnek 4.1.11 -de verilen örneğe bakılabilir.

Örnek 4.1.14.

$n \in \mathbb{N}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^n$$

kuralı ile tanımlı fonksiyon türevlenebilirdir ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

şeklindedir. Gösteriniz.

Teorem 4.2.1.

$$f:[a,b]\to\mathbb{R} \quad \text{ve} \quad g:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonları bir $x_0\in[a,b]$ noktasında türevlenebilir ve $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ olsun.
(i)

$$\lambda f+\mu g:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$(\lambda f+\mu g)'(x_0)=\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0)$$

şeklindedir.

(ii)

$$f.g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

şeklindedir.
(iii) Her $x \in [a,b]$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f}{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

şeklindedir.

(i) $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevini araştıralım:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos\ h + \sin\ h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x (\cos\ h - 1) + \sin\ h \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos\ h - 1}{h} \sin x \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin\ h}{h} \cos x \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos\ h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)-1}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\ h}{h}=1$$

olduğu (4.2) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

elde edilir. Yani; her $x\in\mathbb{R}$ için

$$(\sin x)'=\cos x$$

biçimindedir.

(ii) $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevinin, (i) ifadesindeki benzer işlemlerle, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\cos x)' = -\sin x$$

olduğu görülür.

(iii) $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevi kesirli fonksiyonun türev formülünden her $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ için

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \,(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevi, (iii) ifadesindeki benzer işlemlerle, her $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.4.1.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer

$$g : f([a, b]) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ise bu durumda

$$g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ve

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0) \tag{4.3}$$

şeklindedir.

Not 4.4.2.

Teorem 4.4.1 -in koşulları sağlansın. Bu durumda

$$z = g(y) \quad \text{ve} \quad y = f(x)$$

denilirse (4.3) ifadesi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{4.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu nedenle bileşke fonksiyonun (4.4) şeklinde türev alma kuralına zincir kuralı denir.

Bu kural daha karışık bileşke fonksiyonlar için de kullanılır. Örneğin;

$$y = f\left(u\left(v\left(w\left(x\right)\right)\right)\right)$$

şeklinde bileşke fonksiyon verilirse ve gerekli türevlenebilme şartları sağlanırsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}$$

olur.

Şimdi bu türev alma kuralı ile ilgili bir kaç örnek verelim:

Örnek 4.4.3.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

$(a)\ f(x) = \sin\left(x^2\right)$

$(b)\ f(x) = \tan^5(2x-1)$

$(c)\ f(x) = \sin^4(\cos(x+2))$

Teorem 4.5.1.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve artan (veya azalan) olsun. Eğer f fonksiyonu $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0)\neq 0$ ise f fonksiyonunun

$$\begin{aligned} f^{-1} &: \left(f\left(a^{+}\right), f\left(b^{-}\right)\right)\to\mathbb{R} \\ (\text{veya } f^{-1} &: \left(f\left(b^{-}\right), f\left(a^{+}\right)\right)\to\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$x=f^{-1}(y)$ ters fonksiyonu da $y_0=f(x_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

şeklindedir.

Örnek 4.5.2.

$f(x) = x^3 + x$ eşitliği ile tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left(f^{-1}\right)'(2)$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 4.5.3.

(a) $|y| < 1$ için

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

şeklindedir.

(b) $|y| < 1$ için

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

şeklindedir.

(c) $y \in \mathbb{R}$ için

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

şeklindedir.
(d) $y \in \mathbb{R}$ için

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2}$$

şeklindedir.

$a > 0$ $(a \neq 1)$ olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun türevini araştıralım:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\ &= a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\\ &= a^x\ln a\end{aligned}$$

olup her $x\in\mathbb{R}$ için

$$(a^x)' = a^x\ln a$$

bulunur.

Not 4.6.1.

Özel olarak $a=e$ alınırsa her $x\in\mathbb{R}$ için

$$(e^x)' = e^x$$

olur.

$a > 0$ $(a \neq 1)$ olmak üzere

$$f(x) = \log_a |x|$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevini araştıralım:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a|x+h|-\log_a|x|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left|1+\frac{h}{x}\right|}{h}\\
&= \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{x}\,\frac{\log_a|1+k|}{k}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\left(\log_a|1+k|^{\frac{1}{k}}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{r\to +\infty}\left(\log_a\left|1+\frac{1}{r}\right|^{r}\right)\\
&= \frac{1}{x}\log_a\left|\lim_{r\to +\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}\right|\\
&= \frac{1}{x}\log_a e
\end{aligned}$$

olup her $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

elde edilir.

Not 4.7.1.

Özel olarak $a = e$ alınırsa her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

olur.

Örnek 4.7.2.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

$(a)\ y = f(x) = \ln(\sin x)$
$(b)\ y = f(x) = \log_3(x^2 - 1)$
$(c)\ y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\ ;\ \ (a \neq 0)$
$(d)\ y = f(x) = e^{\sin\left(x^3\right)}$

Teorem 4.8.1.

$$f:(a,b)\to\mathbb{R}^{+}$$

ve

$$g:(a,b)\to\mathbb{R}$$

fonksiyonları $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ise

$$f^{g}:(a,b)\to\mathbb{R}^{+}$$

fonksiyonu da $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{g}\right)'(x_0)=\left[f(x_0)\right]^{g(x_0)}\left\{g'(x_0)\ln f(x_0)+g(x_0)\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 4.8.2.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $x > 0$ olmak üzere

$$y = y(x) = x^{\sin x}$$

(b) $x \in (0, 1)$ olmak üzere

$$y = y(x) = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$$

Hiperbolik fonksiyonların

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

şeklinde tanımlandığı bilinmektedir.

Buna göre

(i) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\sinh x)' = \cosh x \ ,$$

(ii) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\cosh x)' = \sinh x \ ,$$

(iii) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \ ,$$

(iv) Her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

şeklindedir.