MAT 109 ANALİZ I

Türev

Ankara Üniversitesi

9. Hafta

Tanım 4.10.1.

$y = f(x)$ fonksiyonunda x ve y değişkenleri üçüncü bir t değişkeninin

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad ; \qquad t \in (\alpha, \beta) \tag{4.5}$$

fonksiyonları yardımıyla veriliyorsa f fonksiyonu parametrik şekilde verilmiştir denir, burada t değişkenine parametre adı verilir.

Teorem 4.10.2.

φ ve ψ fonksiyonları $t_0 \in (\alpha, \beta)$ noktasının bir $U(t_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda türevlenebilir olsun. Eğer;
(i) $\dot{\varphi}(t_0) = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) \neq 0$,
(ii) φ fonksiyonunun $x_0 = \varphi(t_0)$ noktasının bir $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı $t = \varphi^{-1}(x)$ ters fonksiyonu varsa,
bu durumda (4.5) fonksiyonları yardımıyla parametrik şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu $x_0 = \varphi(t_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$f'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)}$$

şeklindedir.

Örnek 4.10.3.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a\,(t-\sin t) \\ y & = & a\,(1-\cos t) \end{array} \right. \quad ; \quad t \in (0, 2\pi)$$

parametrik denklemi ile verilen $y = y\,(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Tanım 4.11.1.

x ile $y = f(x)$ arasındaki ilişki

$$F(x, y) = 0$$

biçimindeki bir eşitlik ile verilmişse f fonksiyonuna kapalı formda verilmiş fonksiyon adı verilir.

Örnek 4.11.2.

$$x^2 + 2xy - y^2 = 4x$$

kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu her $x \in [a,b]$ noktasında türevlenebiliyorsa bu durumda $[a,b]$ aralığında tanımlı olan ve f fonksiyonunun türev fonksiyonu denilen yeni bir

$$f' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu meydana geldiği bilinmektedir.

Tanım 4.12.1.

$f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebiliyorsa bu durumda

$$(f')' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun 2 -inci mertebeden (basamaktan) türevi adı verilir ve

$$y'' \quad \text{veya} \quad f''(x) \quad \text{veya} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{veya} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

sembollerinden biri ile gösterilmektedir.

Tanım 4.12.2.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $(n-1)$ -inci mertebeden türevlenebilir olsun.

$$f^{(n-1)} : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebiliyorsa bu fonksiyonun

$$\left(f^{(n-1)}\right)' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

türev fonksiyonuna f fonksiyonunun n -inci mertebeden türevi denir ve

$$y^{(n)} \quad \text{veya} \quad f^{(n)}(x) \quad \text{veya} \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{veya} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

sembollerinden biri ile gösterilmektedir.

Not 4.12.3.

Verilen bir f fonksiyonunun 0 -ıncı mertebeden türevi de f fonksiyonunun kendisi olarak, yani $f^{(0)} = f$, tanımlanır.

Örnek 4.12.4.

Aşağıdaki fonksiyonların n -inci mertebeden türevlerini bulunuz.
(a) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^\alpha$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \sin x$,
(c) $a > 0$, $a \neq 1$ ve $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \log_a |x|$.

Örnek 4.12.5.

$$\begin{cases} x & = & 2t - t^2 \\ y & = & 3t - t^3 \end{cases}$$

parametrik denklemi ile tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun 2 -inci mertebeden türevini bulunuz.

Tanım 4.13.1.

$f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0\in[a,b]$ noktası verilmiş olsun. $x_0+h\in[a,b]$ olacak şekildeki her $h\neq 0$ için

$$f(x_0+h)-f(x_0)=B(x_0).h+\varphi(x_0;h) \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlayan
(i)

$$h\rightarrow B(x_0).h$$

lineer fonksiyonu (h değişkenine göre) var,
(ii)

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\varphi(x_0;h)}{h}=0$$

koşulunu gerçekleyen $\varphi(x_0;h)$ fonksiyonu var ise f fonksiyonu x_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Bu durumda

$$h \to B(x_0).h$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun x_0 noktasındaki diferensiyeli adı verilir ve $df(x_0)$, yani

$$(df(x_0))(h) = B(x_0).h \ , \tag{4.7}$$

biçiminde gösterilir.

Not 4.13.2.

$x_0 \in [a, b]$ için (4.6) ifadesi dikkate alınırsa

$$B(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

olduğuna göre (4.7) ifadesinden

$$(df(x_0))(h) = f'(x_0).h \tag{4.8}$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan bu ifadede özel olarak $f(x) = x$ seçilirse $f'(x) = 1$ olup

$$(dx)(h) = 1.h = h$$

ve dolayısıyla (4.8) ifadesi

$$(df(x_0))(h) = f'(x_0).(dx)(h)$$

veya

$$df(x_0) = f'(x_0).dx$$

veya

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

şeklini alır.

Teorem 4.13.3.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olmasıdır.

Not 4.13.4.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. Diferensiyel ve türev arasındaki ilişki dikkate alınırsa Teorem 4.2.1 diferensiyel formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

(i)

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0) \quad ,$$

(ii)

$$d(fg)(x_0) = g(x_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0) \quad ,$$

(iii) $g(x_0) \neq 0$ olmak üzere

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\, df(x_0) - f(x_0)\, dg(x_0)}{g^2(x_0)} \quad .$$

Örneğin;

$$\begin{aligned} y = f(x) = x^m \quad &\Longrightarrow \quad df(x) = mx^{m-1}dx \\ &\Longrightarrow \quad dy = mx^{m-1}dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y = f(x) = \sin x \quad &\Longrightarrow \quad df(x) = \cos x dx \\ &\Longrightarrow \quad dy = \cos x dx \end{aligned}$$

biçimindedir.