MAT 109 ANALİZ I

Türev

Ankara Üniversitesi

11. Hafta

Tanım 4.15.1.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ sayısı verilmiş olsun.
(i) Her

$$x \in U(x_0) \cap X$$

elemanı için

$$f(x) \leq f(x_0)$$

olacak şekilde x_0 noktasının bir $U(x_0)$ komşuluğu varsa, bu durumda x_0 noktasına f fonksiyonunun yerel (lokal) maksimum noktası adı verilir.

(ii) Her

$$x \in U\left(x_0\right) \cap X$$

elemanı için

$$f\left(x_0\right) \leq f\left(x\right)$$

olacak şekilde x_0 noktasının bir $U\left(x_0\right)$ komşuluğu varsa, bu durumda x_0 noktasına f fonksiyonunun yerel (lokal) minimum noktası adı verilir.

Tanım 4.15.2.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına yerel ekstremum noktaları, fonksiyonun bu noktalardaki değerlerine de fonksiyonun yerel ekstremum değerleri denir.

Örnek 4.15.3.

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; \quad 0 \leq x < 3 \\ 4 & ; \quad x \geq 3 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyon için

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \text{ noktası yerel maksimum,} \\ x_0 &= 1 \text{ noktası yerel minimum,} \\ x_0 &= 3 \text{ noktası yerel maksimum,} \\ x_0 &> 3 \text{ noktaları hem yerel maksimum hem de yerel minimum} \end{aligned}$$

noktalarıdır.

Tanım 4.15.4.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ küme, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.
(i) Her $x \in X$ noktası için

$$f(x) \leq f(p)$$

olacak şekilde $p \in X$ noktası varsa bu durumda f fonksiyonu p noktasında mutlak maksimuma sahiptir denir.
(ii) Her $x \in X$ noktası için

$$f(q) \leq f(x)$$

olacak şekilde $q \in X$ noktası varsa bu durumda f fonksiyonu q noktasında mutlak minimuma sahiptir denir.

Teorem 4.15.5. (Fermat Teoremi)

$x_0 \in (a,b)$ noktası

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktası olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir ise

$$f'(x_0) = 0$$

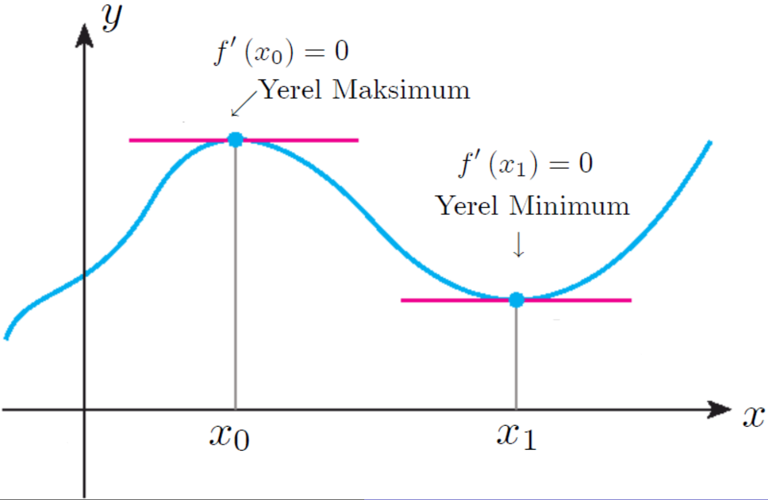
gerçeklenir.

Not 4.15.6.

Fermat teoreminin geometrik yorumu şöyledir:
$x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilen

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu x_0 noktasında yerel ekstremuma sahip olsun. Bu durumda $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paralel olur.



y
$f'(x_0) = 0$
Yerel Maksimum
$f'(x_1) = 0$
Yerel Minimum
x_0
x_1
x

Not 4.15.7.

Fermat teoreminin karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin;

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(0) = 0$ olup fakat x_0 noktası f fonksiyonunun bir yerel ekstremum noktası değildir.

Not 4.15.8.

Bir fonksiyonun bir noktada lokal ekstremuma sahip olması fonksiyonun o noktada türevlenebilir olmasını gerektirmez. Örneğin;

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $f(x) = |x|$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ yerel minimum noktasıdır ancak fonksiyon $x_0 = 0$ noktasında türevli değildir.

Tanım 4.15.9.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ve

$$f'(x_0)=0$$

ise x_0 noktasına f fonksiyonunun duraklama noktası adı verilir.

Tanım 4.15.10.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer x_0 noktası f fonksiyonunun duraklama noktası ya da türevli olmadığı nokta ise x_0 noktasına f fonksiyonunun kritik noktası adı verilir.

Teorem 4.15.11. (Rolle Teoremi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer,

$$f(a) = f(b)$$

ise

$$f'(x_0) = 0$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Not 4.15.12.

Rolle teoreminin geometrik yorumu şöyledir:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir ve

$$f(a) = f(b)$$

olsun. Bu durumda öyle bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır öyle ki $(x_0, f(x_0))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paraleldir.

Not 4.15.13.

Rolle teoreminin hipotezindeki koşulların kaldırılamayacağı gösterilebilir.

Not 4.15.14.

Rolle teoreminin cebirsel yorumu şöyledir.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = f(b) = 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun iki sıfır yeri arasında türev fonksiyonunun en az bir sıfır yeri vardır.

Örnek 4.15.15.

$$5x^4 - 4x + 1 = 0$$

denkleminin $(0,1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

Teorem 4.15.16. (Lagrange Teoremi) (Ortalama Değer Teoremi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Not 4.15.17.

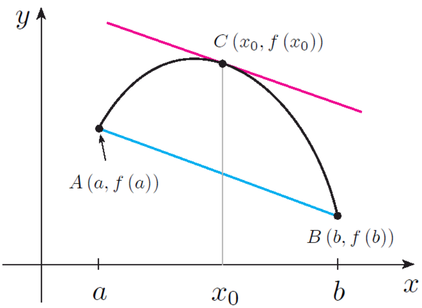
Lagrange teoreminin geometrik yorumu şöyledir:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

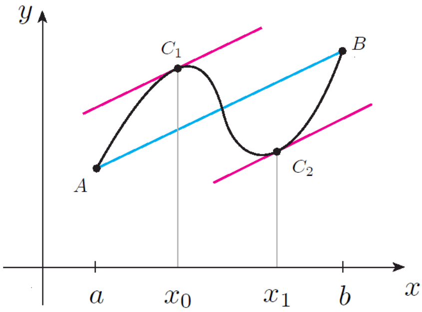
fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda öyle bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır öyle ki

$$C\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$$

noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet $A\left(a, f\left(a\right)\right)$ ve $B\left(b, f\left(b\right)\right)$ noktalarından geçen doğruya paraleldir.



y
$C(x_0, f(x_0))$
$A(a, f(a))$
$B(b, f(b))$
a
x_0
b
x



y
C_1
B
A
C_2
a
x_0
x_1
b
x

Örnek 4.15.18.

Lagrange teoreminden faydalanarak $x_1 < x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1$$

olduğunu gösteriniz.

Sonuç 4.15.19.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $\theta \in (0,1)$ sayısı vardır.

Sonuç 4.15.20.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda $x_1 < x_2$ olacak şekilde her $x_1, x_2 \in [a,b]$ sayıları için

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde en az bir $\theta \in (0,1)$ sayısı vardır.

Sonuç 4.15.21.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda
(a) Her $x \in (a, b)$ için

$$f'(x) = 0$$

ise f fonksiyonu (a, b) aralığında sabit fonksiyondur.
(b) Her $x \in (a, b)$ için

$$f'(x) > 0$$

ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artan fonksiyondur.

(c) Her $x \in (a,b)$ için

$$f'(x) \geq 0$$

ise f fonksiyonu (a,b) aralığında azalmayan fonksiyondur.
(d) Her $x \in (a,b)$ için

$$f'(x) < 0$$

ise f fonksiyonu (a,b) aralığında azalan fonksiyondur.
(e) Her $x \in (a,b)$ için

$$f'(x) \leq 0$$

ise f fonksiyonu (a,b) aralığında artmayan fonksiyondur.

Örnek 4.15.22.

$$f(x) = \operatorname{arccot} x - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sabit fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Örnek 4.15.23.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

fonksiyonunun monoton olduğu aralıkları bulunuz.

Teorem 4.15.24. (Cauchy Teoremi)

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Fermat teoremi göz önüne alındığında aşağıdaki önermenin doğru olduğu söylenebilir.

Önerme 4.16.1.

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0 \in I$ olsun. x_0 noktasının f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası olması için gerekli koşul x_0 noktasının f fonksiyonunun kritik noktası olmasıdır.

Not 4.16.2.

x_0 noktasının $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktası olması için Önerme 4.16.1 -deki koşul gereklidir ancak yeterli değildir. Örneğin;
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^3$ olsun. Bu durumda $f'(0) = 0$ olup $x_0 = 0$ noktası f fonksiyonunun kritik noktasıdır. Ancak $x_0 = 0$ noktası f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası değildir.

(2) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x > 0 \\ 2x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

olsun. Buna göre $x_0 = 0$ noktasında f fonksiyonu türevli olmayıp, $x_0 = 0$ noktası f fonksiyonunun kritik noktasıdır. Ancak $x_0 = 0$ noktası f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası değildir.

Uyarı 4.16.3.

Yukardaki ifadelerden görüldüğü gibi fonksiyonun yerel ekstremum değerlerini kritik noktalardaki değerleri arasında aramak gerekir. Fonksiyonun kritik noktalarının hangisinin yerel ekstremum noktası olduğunu aşağıdaki teorem belirtmektedir.

Teorem 4.16.4.

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0 \in I$ olmak üzere

(i) x_0 noktası f fonksiyonunun kritik noktası,

(ii) f fonksiyonu I aralığında sürekli ve $I \backslash \{x_0\}$ kümesinde türevlenebilir

olsun. Bu durumda

(1)

$$\begin{cases} \text{Her } x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \text{ için } f'(x) \geq 0 \\ \text{Her } x \in I \cap (x_0, x_0 + \delta) \text{ için } f'(x) \leq 0 \end{cases}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa x_0 noktası f fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.

(2)

$$\begin{cases} \text{Her } x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \text{ için } f'(x) \leq 0 \\ \text{Her } x \in I \cap (x_0, x_0 + \delta) \text{ için } f'(x) \geq 0 \end{cases}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa x_0 noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.

(3)

$$\begin{cases} \text{Her } x \in I \cap [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \text{ için } f'(x) > 0 \\ \text{ya da} \\ \text{Her } x \in I \cap [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \text{ için } f'(x) < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa x_0 noktası f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası değildir.

Not 4.16.5.

Teorem 4.16.4 ifadesinden görüldüğü gibi kritik noktadan geçişte türev işareti negatiften (pozitiften) pozitife (negatife) değişiyorsa bu durumda bu nokta f fonkiyonunun yerel minimum (maksimum) noktasıdır. Eğer kritik noktadan geçişte türev işaretini değiştirmiyorsa bu nokta f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası değildir.

Örnek 4.16.6.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$$

fonksiyonu için yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz. Ayrıca, f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

Teorem 4.16.7.

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0 \in I$ olsun. Ayrıca; f fonksiyonu I aralığında türevlenebilir,

$$f'(x_0) = 0$$

ve f fonksiyonunun x_0 noktasındaki ikinci mertebeden türevi

$$f''(x_0)$$

mevcut olsun.
(i) Eğer

$$f''(x_0) > 0$$

ise bu durumda x_0 noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.
(ii) Eğer

$$f''(x_0) < 0$$

ise bu durumda x_0 noktası f fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.

Örnek 4.16.8.

$y = \sqrt{x}$ eğrisinin

$$B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

noktasına en yakın olan noktasını bulunuz.

Not 4.16.9.

Bilinmektedir ki bir fonksiyon mutlak maksimum ve mutlak minimum değere sahip olmak zorunda değildir. Ancak, mutlak ekstremumun varlığını garanti eden iki önemli durum vardır:

(I.) DURUM

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda Teorem 3.2.7 dikkate alınırsa bu f fonksiyonu bir mutlak maksimuma ve mutlak minimuma sahiptir. Teorem 3.2.7 mutlak ekstremumların varlığı ile ilgili olup uygulamada bu değerlerin nasıl bulunabileceği hakkında bir bilgi vermemektedir. Bu nedenle bir mutlak ekstremum değerin aynı zamanda yerel ekstremum değer olması gerçeğinden hareketle bir inceleme yapılacaktır.

Yani,

"f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki yerel ekstremum değerleri nelerdir?"

sorusuna cevap aranmalıdır. Önerme 4.16.1 göz önüne alınırsa (a, b) aralığında f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası f fonksiyonunun kritik noktası olmak zorundadır. Yerel ekstremum nokta için diğer olasılık sadece $[a, b]$ aralığının bitim noktalarıdır.

Dolayısıyla

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonunun mutlak ekstremum değerlerini bulmak için
(i) f fonksiyonunun (a,b) aralığında kritik noktaları tespit edilip bu kritik noktalarda f fonksiyonunun değerleri bulunur,
(ii) f fonksiyonunun $x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki değerleri bulunur
ve bulunan bu değerler karşılaştırıldığında bu değerlerin en büyüğüne f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak maksimum değeri, en küçüğüne f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak minimum değeri denir.

(II.) DURUM

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olması halinde fonksiyonun mutlak ekstremum değerini bulma problemi bir diğer durumdur. Bunun için aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 4.16.10.

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $x_0 \in I$ ve f fonksiyonunun yalnız bir kritik noktası x_0 olsun. Bu durumda
(i) Eğer x_0 noktası yerel maksimum noktası ise x_0 noktası mutlak maksimum noktasıdır.
(ii) Eğer x_0 noktası yerel minimum noktası ise x_0 noktası mutlak minimum noktasıdır.

Örnek 4.16.11.

$$f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Tanım 4.17.1.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığı ve

$$f:(a,b)\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu verilmiş olsun.
(i) Her $x_1, x_2 \in (a,b)$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right) \leq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda)\, f\left(x_2\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu (a,b) aralığında konvekstir (dış bükey) denir.
(ii) Her $x_1, x_2 \in (a,b)$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right) \geq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda)\, f\left(x_2\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu (a,b) aralığında konkavdır (iç bükey) denir.

Not 4.17.2.

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu (a, b) aralığında konveks (konkav) ise

$$x_1 < x_2$$

olacak şekilde her $x_1, x_2 \in (a, b)$ için f fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ aralığındaki grafiği, $y = f(x)$ eğrisi üzerindeki $A(x_1, f(x_1))$ ve $B(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren AB doğru parçasının altındadır (üstündedir).

Örnek 4.17.3.

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=x^2$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonunun $(-1,1)$ aralığında konveks olduğunu gösteriniz.

Teorem 4.17.4.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında türevlenebilir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) aralığında konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

türev fonksiyonunun (a,b) aralığında azalmayan fonksiyon olmasıdır.

Sonuç 4.17.5.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında 2 -inci mertebeden türevlenebilir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a,b)$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır.

Teorem 4.17.6.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında türevlenebilir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) aralığında konkav fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

türev fonksiyonunun (a,b) aralığında artmayan fonksiyon olmasıdır.

Sonuç 4.17.7.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında 2 -inci mertebeden türevlenebilir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) aralığında konkav olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a,b)$ için

$$f''(x) \leq 0$$

olmasıdır.

Tanım 4.17.8.

$x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $U_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı ve türevlenebilir

$$f : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu

$$(x_0 - \delta, x_0)$$

aralığında konveks (veya konkav),

$$(x_0, x_0 + \delta)$$

aralığında konkav (veya konveks) ise $x = x_0$ noktasına f fonksiyonunun büküm noktası denir. Bir başka deyişle; f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya f fonksiyonunun büküm noktası adı verilir.

Örnek 4.17.9.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=x^4-6x^2+12$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz. Büküm noktalarını belirtiniz.