

MAT 109 ANALİZ I

Türev

Ankara Üniversitesi

12. Hafta

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Teorem 4.18.1. (L' Hospital Kuralı)

$\delta > 0, a \in \mathbb{R}$ ve

$$f, g : \mathring{U}_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

(i) f ve g fonksiyonları $\mathring{U}_\delta(a)$ kümesinde türevlenebilir,

(ii) Her $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ için $g'(x) \neq 0$,

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

olsun.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (4.13)$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4.14)$$

gerçeklenir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Not 4.18.2.

Teorem 4.18.1 -deki önermenin karşıtı genellikle doğru değildir. Örneğin; $a = 0$ olmak üzere

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ve} \quad g(x) = \sin x$$

fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right] \left[\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmasına rağmen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

ifadesi mevcut değildir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Not 4.18.3.

f' ve g' türev fonksiyonları Teorem 4.18.1 -in hipotezlerini sağlıyorsa bu durumda L' Hospital kuralı bir defa daha uygulanabilir, yani

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

yazılabilir. Bir başka deyişle; belirsizlikten kurtuluncaya kadar L' Hospital kuralı uygulanmaya devam edilir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Örneğin;

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2 \cos x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x - 2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{2 - 2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{\cos x} \\ &= 12 \end{aligned}$$

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Teorem 4.18.4. (L' Hospital Kuralı)

$\Delta > 0$ olmak üzere

(a)

$$f, g : (\Delta, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

(i) f ve g fonksiyonları $(\Delta, +\infty)$ aralığında türevlenebilir,

(ii) Her $x \in (\Delta, +\infty)$ için $g'(x) \neq 0$,

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

olsun.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Eğer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gerçeklenir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

(b)

$$f, g : (-\infty, -\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

(i) f ve g fonksiyonları $(-\infty, -\Delta)$ aralığında türevlenebilir,

(ii) Her $x \in (-\infty, -\Delta)$ için $g'(x) \neq 0$,

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

olsun.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Eğer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gerçeklenir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Örnek 4.18.5.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

ifadesini hesaplayınız.

$\frac{\infty}{\infty}$ biçiminde belirsizlik oluşturan ifadeler için L' Hospital kuralı aşağıdaki gibi verilmiştir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Teorem 4.18.6. (L' Hospital Kuralı)

$\delta > 0, a \in \mathbb{R}$ ve

$$f, g : \mathring{U}_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

(i) f ve g fonksiyonları $\mathring{U}_\delta(a)$ kümesinde türevlenebilir,

(ii) Her $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ için $g'(x) \neq 0$,

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \text{ (veya } -\infty)$$

olsun.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gerçeklenir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Not 4.18.7.

Teorem 4.18.4 -de olduğu gibi, belirli şartlar altında Teorem 4.18.6 -nın $x \rightarrow +\infty$ (veya $x \rightarrow -\infty$) durumlarında da doğru olduğu gösterilebilir.

Not 4.18.8.

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 ve 1^∞ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeler uygun işlemler yapılarak

$$\frac{0}{0} \quad \text{ya da} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

biçimindeki belirsizlik oluşturan ifadelerden birine dönüştürülebilir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

Örneğin;

(i)

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \frac{1}{f}}$$

eşitliği yardımıyla $\infty - \infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifade $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeye dönüştürülebilir.

(ii)

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

eşitliği yardımıyla $0 \cdot \infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifade $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeye dönüştürülebilir.

4. Türev

4.18. Belirsizlik Oluşturan İfadeler

(iii) $y = [f(x)]^{g(x)}$ ifadesinde 0^0 (∞^0 veya 1^∞) şeklinde belirsizlik oluşturan ifade varsa

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

eşitliği yardımıyla bu belirsizlik $0 \cdot \infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeye dönüştürülebilir.