

MAT 109 ANALİZ I

Türev

Ankara Üniversitesi

13. Hafta

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

Tanım 4.19.1.

(i) $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - b] = 0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - b] = 0$$

ise

$$y = b$$

doğrusuna $x \rightarrow +\infty$ (ya da $x \rightarrow -\infty$) iken f fonksiyonunun yatay asimtotu adı verilir.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

(ii) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

ise

$$y = ax + b$$

doğrusuna $x \rightarrow +\infty$ (ya da $x \rightarrow -\infty$) iken f fonksiyonunun eğik asimtotu adı verilir.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

(iii) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$$

ifadelerinden en az biri sağlanıyorsa

$$x = c$$

doğrusuna f fonksiyonunun dikey asimtotu adı verilir.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

Teorem 4.19.2.

$$y = ax + b$$

doğrusunun $x \rightarrow +\infty$ iken f fonksiyonunun eğik asimtotu olması için gerek ve yeter şart

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ve} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

olmasıdır.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

Not 4.19.3.

Benzer şekilde;

$$y = ax + b$$

doğrusunun $x \rightarrow -\infty$ iken f fonksiyonunun eğik asimtotu olması için gerek ve yeter şart

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ve} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

olmasıdır.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

Örnek 4.19.4.

$$(a) \quad y = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(b) \quad y = f(x) = \arctan x$$

$$(c) \quad y = f(x) = \operatorname{arccot} x$$

fonksiyonlarının yatay asimtotlarını bulunuz.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

Örnek 4.19.5.

$$(a) \quad y = f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$$

$$(b) \quad y = f(x) = \log_a x$$

$$(c) \quad y = f(x) = \tan x$$

$$(d) \quad y = f(x) = \cot x$$

fonksiyonlarının düşey asimtotlarını bulunuz.

4. Türev

4.19. Asimtot Kavramı

Örnek 4.19.6.

Aşağıda verilen fonksiyonların, eğer varsa, asimtotlarını bulunuz.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$$

(b) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \sqrt{x}$$