

MAT 110 ANALİZ II

Belirsiz İntegraller

Ankara Üniversitesi

1. Hafta

5.1. Temel Kavramlar

$I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun.

Tanım 5.1.1.

$\forall x \in I$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak şekilde F fonksiyonuna f fonksiyonunun I aralığındaki bir ilkel fonksiyonu (antitürevi) adı verilir.

5.1. Temel Kavramlar

Örneğin; $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ve $G(x) = \sin x$ fonksiyonları sırasıyla $f(x) = x$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonlarının \mathbb{R} üzerindeki bir ilkel fonksiyonlarıdır. Çünkü; $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad G'(x) = g(x)$$

dir.

5.1. Temel Kavramlar

Teorem 5.1.2.

F ve G fonksiyonları f fonksiyonunun I aralığındaki birer ilkel fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$G(x) = F(x) + C$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

5.1. Temel Kavramlar

Tanım 5.1.3.

$I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonunun I aralığındaki tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine f fonksiyonunun belirsiz integrali adı verilir ve

$$\int f(x) dx$$

biçiminde gösterilir. \int simgesine belirsiz integral işareti, f ifadesine integrant, x değişkenine de integrasyon değişkeni adı verilir.

5.1. Temel Kavramlar

Dolayısıyla $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f fonksiyonunun I aralığındaki bir ilkel fonksiyonu ise C keyfi sabit olmak üzere

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

şeklinde yazılabilir, burada C sabitine integrasyon sabiti adı verilir.

5.1. Temel Kavramlar

Örneğin;

$f(x) = x^4$ fonksiyonunun \mathbb{R} üzerindeki bir ilkel fonksiyonu

$F(x) = \frac{x^5}{5}$ olup

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

dir.

5.1. Temel Kavramlar

$f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun \mathbb{R} üzerindeki bir ilkel fonksiyonu
 $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ olup

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

dir.

$f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonunun $(-1, 1)$ aralığındaki bir ilkel
fonksiyonu $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ olup

$$\int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$$

dir.

5.1. Temel Kavramlar

Not 5.1.4.

Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta ilkel fonksiyonunun mevcut olması bir sonraki bölümde incelenecektir. Ancak belirtmek gerekir ki; bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli her fonksiyonun I aralığında bir ilkel fonksiyonu mevcuttur.

5.1. Temel Kavramlar

Not 5.1.5.

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun I aralığındaki bir ilkel fonksiyonu ise $\forall x \in I$ için

$$F'(x) = f(x)$$

ve

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

sağlanır.

5.1. Temel Kavramlar

Buradan

$$d \left(\int f(x) dx \right) = dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$$

olup

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

ve dolayısıyla

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

elde edilir.

5.1. Temel Kavramlar

Elemanter fonksiyonlar için elde edilen türev formülleri yardımıyla aşağıdaki belirsiz integral ifadeleri yazılabilir:

(1)

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

(2)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0)$$

(3)

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

5.1. Temel Kavramlar

(4)

$$\int e^x dx = e^x + C$$

(5)

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

(6)

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

5.1. Temel Kavramlar

(7)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad , \quad \left(x \neq \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right)$$

(8)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad , \quad (x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z})$$

(9)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C} \quad , \quad (-1 < x < 1)$$

5.1. Temel Kavramlar

(10)

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + \tilde{C}$$

(11)

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

(12)

$$\int \cosh x = \sinh x + C$$

5.1. Temel Kavramlar

(13)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C$$

(14)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) + C \quad , \quad (|x| > 1)$$

5.1. Temel Kavramlar

Teorem 5.1.6. (İntegralin Lineerliği)

f ve g fonksiyonlarının I aralığında ilkel fonksiyonu mevcut olsun. Bu durumda keyfi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha f + \beta g$ fonksiyonun da I aralığında ilkel fonksiyonu mevcuttur ve

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

sağlanır.

5.1. Temel Kavramlar

Örnek 5.1.7.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a) \int (9x^2 + 6x + 3) dx$$

$$(b) \int \left(3 \cos x + x^{3/2} + \frac{1}{2x} \right) dx$$

$$(c) \int \left(2e^x + 3 \cdot 5^x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$$