MAT 110 ANALİZ II

Belirli İntegraller (Riemann İntegrali)

Ankara Üniversitesi

5. Hafta

Tanım 6.3.1.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon ve $[a,b]$ aralığının bir parçalanması

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

olsun. Herbir $k = 1, 2, ..., n$ için

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

sayıları seçilsin.

$$\mathscr{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k$$

toplamına $\mathcal{P}$ parçalanmasına ve $\{t_k\}$ noktalarına göre f fonksiyonunun Riemann toplamı denir.

Tanım 6.3.2.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki $\|\mathcal{P}\| < \delta$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığının her $\mathcal{P}$ parçalanması ve her $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sayısı için

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k - I \right| < \epsilon \tag{6.2}$$

gerçekleniyorsa

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \mathscr{S}(f, \mathcal{P}) = I$$

olması demektir.

Teorem 6.3.3.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun.

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \mathscr{S}(f, \mathcal{P}) = I \Longleftrightarrow f \in \mathcal{R}[a, b] \text{ ve } \int_a^b f(x)\, dx = I$$

Örnek 6.3.4.

Riemann toplamları yöntemi ile

$$\int_a^b x dx$$

integralini hesaplayınız.

Teorem 6.3.5.

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.
(i) $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ olup

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

dir.
(ii) $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ olup

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

dir.

Sonuç 6.3.6.

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \mathcal{R}[a,b]$$

olup

$$\int_a^b [\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)]\, dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

sağlanır.

Sonuç 6.3.7.

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \leq g(t)$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

dir.

Teorem 6.3.8.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır.