MAT 110 ANALİZ II

Belirli İntegrallerin Uygulamaları

Ankara Üniversitesi

9. Hafta

Teorem 7.2.1.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

dir.

Örnek 7.2.2.

$y = x^2$ eğrisi, $x = 3$, $x = 6$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Sonuç 7.2.3.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

dir.

Örnek 7.2.4.

Dördüncü bölgede, $y = x^3 - 3x$ eğrisi ile Ox -ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Sonuç 7.2.5.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $c\in(a,b)$ olmak üzere $\forall x\in[a,c]$ için $f(x)\geq 0$ ve $\forall x\in[c,b]$ için $f(x)\leq 0$ olsun. Bu durumda $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A=\int_a^c f(x)\,dx+\left(-\int_c^b f(x)\,dx\right)$$

dir.

Not 7.2.6.

Yukarıdaki tüm alan formüllerinin hepsi tek bir formülle

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

biçiminde ifade edilebilir.

Örnek 7.2.7.

$y = x^2 - 4x + 3$ eğrisi, $x = 2$, $x = 4$ doğruları ve Ox -ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Sonuç 7.2.8.

$u : [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[c,d]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda $x = u(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_c^d |u(y)|\, dy$$

olacaktır.

Örnek 7.2.9.

$y = x^3$ eğrisi, $y = 1$, $y = 8$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Teorem 7.2.10.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq g(x)$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

dir.

Sonuç 7.2.11.

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $g(x) \geq f(x)$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

dir.

Örnek 7.2.12.

$y = x^2 + 2$, $y = 2x - x^2$ parabolleri ile Oy -ekseni ve $x = 3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Sonuç 7.2.13.

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli, $c \in (a, b)$ olmak üzere $\forall x \in [a, c]$ için $f(x) \geq g(x)$ ve $\forall x \in [c, b]$ için $g(x) \geq f(x)$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

dir.

Örnek 7.2.14.

$y = 3x - x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Not 7.2.15.

$[a,b]$ aralığında sürekli olan f ile g fonksiyonlarının durumları ne olursa olsun, $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

olacaktır.

Sonuç 7.2.16.

$h, k : [c, d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[c, d]$ aralığında sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $x = h(y)$, $x = k(y)$ eğrileri ile $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_c^d |h(y) - k(y)| \, dy$$

olacaktır.

Örnek 7.2.17.

$x = 2y$ doğrusuyla $x = 8 - y^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Teorem 7.2.18.

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen C eğrisini dikkate alalım. Bu durumda C eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| \, g'(t) \, dt$$

olur, burada a ve b sayılarına karşılık gelen değerler, sırası ile, t_1 ve t_2 dir.

Teorem 7.2.19.

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen C eğrisini dikkate alalım. Bu durumda C eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_{t_3}^{t_4} |g(t)|\, h'(t)\, dt$$

olur, burada c ve d sayılarına karşılık gelen değerler, sırası ile, t_3 ve t_4 dür.

Örnek 7.2.20.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

parametrik denklemiyle verilen elipsin alanını bulunuz.

Teorem 7.2.21.

$0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ olmak üzere $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $r = f(\theta)$ eğrisi, $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

dır.

Sonuç 7.2.22.

$0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ olmak üzere $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli ve $0 \leq g(\theta) \leq f(\theta)$ olsun. Bu durumda $r = g(\theta)$, $r = f(\theta)$ eğrileri ve $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ [f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2 \right\} d\theta$$

olur.

Örnek 7.2.23.

$$r = 3\sin\theta$$

çemberinin içinde,

$$r = 1 + \sin\theta$$

kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.