MAT 110 ANALİZ II

Seriler

Ankara Üniversitesi

11. Hafta

Tanım 8.1.1.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{8.1}$$

sembolüne sonsuz toplam ya da seri adı verilir.

8.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sayılarına serinin terimleri adı verilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin kısmi toplamları

$s_1 =$	a_1	(1. *Kısmi Toplam*)
$s_2 =$	$a_1 + a_2$	(2. *Kısmi Toplam*)
$s_3 =$	$a_1 + a_2 + a_3$	(3. *Kısmi Toplam*)
...	...	...
$s_n =$	$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$	(n. *Kısmi Toplam*)

olarak tanımlansın.

Tanım 8.1.2.

(a_k) reel sayı dizisi için

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

olmak üzere (s_n) dizisine

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir.

Tanım 8.1.3.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Eğer (s_n) dizisi yakınsak, yani

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R},$$

ise bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsaktır denir

ve

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = s \quad \text{ya da} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

olarak yazılır. Eğer (s_n) dizisi ıraksak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi ıraksaktır denir.

Örnek 8.1.4. (Geometrik Seri)

$|r| < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r}$$

olduğunu gösreriniz.

Sonuç 8.1.5.

Yukardaki örnek göz önüne alındığında geometrik seriler için aşağıdaki

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \sim \begin{cases} \text{Yakınsak} & ; \quad |r| < 1 \\ \text{Iraksak} & ; \quad |r| \geq 1 \end{cases}$$

ifade yazılabilir.

Örnek 8.1.6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise serinin yakınsadığı değeri (serinin toplamını) bulunuz.

Örnek 8.1.7.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Teorem 8.1.8. (Cauchy Kriteri)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart verilen keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $m > n > n_0$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon$$

olmasıdır.

Sonuç 8.1.9.

Teorem 8.1.8 dikkate alındığında

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsaktır} \iff (s_n) \text{ k.t.d. Cauchy dizisidir.}$$

olduğu kolaylıkla söylenebilir.

Örnek 8.1.10. (Harmonik Seri)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

serisi ıraksaktır. Gösteriniz.

Teorem 8.1.11.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsak} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

dır.

Not 8.1.12.

Teorem 8.1.11 -de verilen önermenin karşıtı doğru değildir. Yani; eğer

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsak olmayabilir.

Örneğin;

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

olmasına rağmen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

serisi ıraksaktır.

Sonuç 8.1.13. (Iraksaklık Kriteri)

$$\lim_{k\to\infty} a_k$$

mevcut değil ya da

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$$

ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi ıraksaktır.

Örnek 8.1.14.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{k^2+1}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Tanım 8.1.15.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$K_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

ifadesine

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin kalan terimi denir.

Teorem 8.1.16.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsak olsun. Bu durumda bu serinin kalan teriminin limiti sıfırdır, yani

$$\lim_{n\to\infty} K_n = 0$$

dır.

Teorem 8.1.17.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serileri yakınsak olsun. Bu durumda

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$$

serileri de yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mp \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

gerçeklenir.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

serisi de yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

gerçeklenir.