

MATEMATİK I

Fonksiyonlar

Ankara Üniversitesi

1. Hafta

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.1.

X ve Y iki küme olsun. X kümesinden alınan her

$$x \in X$$

elemanını Y kümesinin bir ve yalnız bir

$$y \in Y$$

elemanına eşleyen f bağıntısına veya kuralına X kümesi üzerinde tanımlı değerlerini Y kümesinden alan bir fonksiyon denir. Kısaca, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon da denilmektedir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.2.

f fonksiyonunun kuralına göre Y kümesine eşlenen $x \in X$ elemanlarının kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi adı verilir ve tanım kümesi X kümesinin bir alt kümesi olup

$$\mathcal{D}(f)$$

ile gösterilir. O halde

$$f : \mathcal{D}(f) \subseteq X \rightarrow Y$$

yazılabilir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Not 1.1.3.

Eğer $\mathcal{D}(f) = X$ ise bu durumda f fonksiyonuna X kümesi üzerinde tanımlıdır denir ve

$$f : X \rightarrow Y$$

ile gösterilir.

Tanım 1.1.4.

Tanım kümesinden alınan $x \in \mathcal{D}(f)$ elemanına karşılık bu fonksiyonun kuralı altında eşlenen $y \in Y$ elemanına x elemanının f fonksiyonu altında görüntüsü denir ve

$$y = f(x)$$

ile gösterilir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.5.

Tanım kümesindeki her elemanın $y = f(x)$ ile verilen görüntülerinden oluşan kümeye görüntü kümesi denir ve

$$\mathcal{R}(f)$$

ile gösterilir. Bu $\mathcal{R}(f)$ kümesi de Y kümesinin bir alt kümesidir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.6.

f fonksiyonunun $\mathcal{G}(f)$ grafiği, $X \times Y$ kartezyen çarpımının bir alt kümesi olup f fonksiyonunun tanım kümesinden alınan her x elemanı için

$$(x, f(x))$$

ikililerinden oluşur, yani

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(f)\}$$

şeklindedir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Not 1.1.7.

Eğer $Y = \mathbb{R}$ ise bu durumda f fonksiyonuna reel ya da reel değerli bir fonksiyon, $X = \mathbb{R}$ ise de reel değişkenli bir fonksiyon denilmektedir. Dolayısıyla bir f fonksiyonu

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ise bu fonksiyonun grafiği $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ düzleminin bir alt kümesidir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Örnek 1.1.8.

(i)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x) = ax + b$$

kuralı ile tanımlı f fonksiyonu reel değerli ve reel değişkenli olup bu fonksiyonun grafiği \mathbb{R}^2 düzleminde doğrulardır.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

(ii)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x) = x^2 - 2$$

kuralı ile tanımlı f fonksiyonu reel değerli ve reel değişkenli olup bu fonksiyonun grafiği \mathbb{R}^2 düzleminde parabol belirtir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

(iii)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

kuralı ile tanımlı f fonksiyonun grafiği \mathbb{R}^2 düzleminde hiperbol belirtir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

(iv) Reel değerli ve reel değişkenli bir fonksiyon farklı aralıklar üzerinde farklı şekilde tanımlanabilir. Böyle fonksiyonlara parçalı fonksiyon denilmektedir. Örneğin; $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 3x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & ; 1 < x \leq 2 \\ x - 1 & ; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

kuralı ile tanımlı f fonksiyonu bir parçalı fonksiyondur.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.9.

f ve g iki fonksiyon olmak üzere $f + g$ toplamı, $f - g$ farkı, $f \cdot g$ çarpımı ve $\frac{f}{g}$ bölümü aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) ,$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) ,$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) ,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} , \quad (g(x) \neq 0) .$$

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Örnek 1.1.10.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = x - 1$ kuralları ile tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

fonksiyonlarını bulunuz. Bu fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.11.

A kümesi X kümesinin bir alt kümesi olmak üzere A kümesinin her bir elemanının görüntülerinden oluşan kümeye A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Yani

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq \mathcal{R}(f)$$

şeklindedir.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 1.1.12.

B kümesi Y kümesinin bir alt kümesi olmak üzere B kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntü (ön görüntü) kümesi

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in B\}$$

ile tanımlanmaktadır.

1. Fonksiyonlar

1.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Örnek 1.1.13.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2$ olsun.

(i) $A = [1, 2]$ kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsünü $f(A)$ bulunuz.

(ii) $B = [1, 4]$ kümesinin f fonksiyonu altındaki ön görüntüsünü $f^{-1}(B)$ bulunuz.