MATEMATİK I

Fonksiyonlar

Ankara Üniversitesi

2. Hafta

Tanım 1.1.14. (Örten Fonksiyon)

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun. Eğer

$$\mathcal{R}(f) = Y$$

ise f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. Bir başka deyişle, f fonksiyonunun örten olması için Y kümesinden alınan her y elemanı X kümesinden alınan en az bir x elemanının görüntüsü olmalıdır.

Örnek 1.1.15.

(i) $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu örtendir. Gösteriniz.
(ii) $f(x) = x^2$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu örten değildir. Gösteriniz.

Tanım 1.1.16.

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun. Herhangi bir $y \in \mathcal{R}(f)$ elemanı, tanım kümesinin bir tek $x \in \mathcal{D}(f)$ elemanının görüntüsü ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon adı verilir. Yani, f fonksiyonunun birebir olması için

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \quad \ni \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ya da

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \quad \ni \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

koşulu sağlanmalıdır.

Tanım 1.1.17.

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu hem birebir hem de örten ise f fonksiyonuna birebir örten fonksiyon adı verilir.

Örnek 1.1.18.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu birebir örten fonksiyondur. Gösteriniz.

Tanım 1.1.19.

$f : X \to X$ fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$f(x) = x$$

ise f fonksiyonuna birim (özdeşlik) fonksiyon denir ve I_X ile gösterilir.

Tanım 1.1.20.

$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

olarak tanımlı

$$g \circ f : X \to Z$$

fonksiyonuna f fonksiyonu ile g fonksiyonunun bileşkesi adı verilir.

Not 1.1.21.

$g : X \to Y$ ve $f : Y \to Z$ olmak üzere benzer şekilde her $x \in X$ için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.22.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=x^2+3x$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $g(x)=2x^2+1$ kuralları ile tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$g\circ f \quad \text{ve} \quad f\circ g$$

ifadelerini bulunuz.

Tanım 1.1.23.

$f : X \to Y$ fonksiyonu birebir örten fonksiyon olsun. Bu durumda

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{ve} \quad (f \circ g)(y) = y$$

eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi adı verilir ve f^{-1} ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$f^{-1} \circ f = I_X \qquad \text{ve} \qquad f \circ f^{-1} = I_Y$$

olacaktır.

Not 1.1.24.

$y = f(x)$ ve $y = f^{-1}(x)$ eğrilerinin grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

Örnek 1.1.25.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=x^3+1$ fonksiyonunun, eğer varsa, tersini bulunuz.

Tanım 1.1.26.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin

$$x_1 < x_2$$

koşulunu sağlayan herhangi iki elemanı x_1 ve x_2 olsun. Eğer

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde artandır denir. Bir başka deyişle

$$\forall x_1, x_2 \in I \ni x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

olmalıdır. Eğer

$$\forall x_1, x_2 \in I \ni x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde kesin olarak artandır denir.

Tanım 1.1.27.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin

$$x_1 < x_2$$

koşulunu sağlayan herhangi iki elemanı x_1 ve x_2 olsun. Eğer

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde azalandır denir. Bir başka deyişle

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \ni \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

olmalıdır. Eğer

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \ni \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde kesin olarak azalandır denir.

Tanım 1.1.28.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde f fonksiyonu kesin olarak artan veya kesin olarak azalan ise f fonksiyonuna I kümesinde kesin olarak monoton fonksiyon; aynı küme üzerinde artan veya azalan ise monoton fonksiyon adı verilmektedir.

Örnek 1.1.29.

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının monotonluk durumunu inceleyiniz.

Teorem 1.1.30.

Eğer f fonksiyonu tanım kümesi üzerinde kesin olarak monoton ise bu durumda f fonksiyonu birebirdir.

Not 1.1.31.

Bu önermenin karşıtı doğru değildir. Yani, f fonksiyonu birebir ise kesin olarak monoton bir fonksiyon olmak zorunda değildir.
Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu birebir bir fonksiyon olup ancak $\mathbb{R}$ üzerinde kesin olarak artan ya da kesin olarak azalan bir fonksiyon değildir.

Tanım 1.1.32.

$f:\mathcal{D}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu orijine göre simetrik bir tanım kümesine sahip (Yani herhangi bir $x\in\mathcal{D}(f)$ elemanı için $-x\in\mathcal{D}(f)$) olsun. Eğer her $x\in\mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x)=f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon,

$$f(-x)=-f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Not 1.1.33.

Çift fonksiyonların grafiği y eksenine göre simetrik, tek fonksiyonların grafiği orijine göre simetriktir.

Tanım 1.2.1. (Kuvvet Fonksiyonu)

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(x) = x^n$$

kuralı ile tanımlı

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlara kuvvet fonksiyonu adı verilir.

Tanım 1.2.2. (Polinom Fonksiyonu)

$n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, ..., a_n$ sabit reel sayılar öyle ki $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

kuralı ile tanımlı

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna polinom fonksiyonu denir, burada n doğal sayısına polinomun derecesi; $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları adı verilir.