MATEMATİK I

Fonksiyonlar

Ankara Üniversitesi

3. Hafta

Tanım 1.2.3. (Rasyonel Fonksiyon)

p ve q polinom fonksiyonu öyle ki $q \neq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

kuralı ile tanımlı

$$f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna rasyonel fonksiyon adı verilir.

Örnek 1.2.4.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Tanım 1.2.5.

$A \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$f(x) = [\![x]\!]$$

şeklinde tanımlanan

$$f : A \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna tam kısım fonksiyonu adı verilir, burada $[\![x]\!]$ simgesi x sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermektedir.

Not 1.2.6.

(i) $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $p \leq x < p+1$ reel sayısı için

$$[\![x]\!] = p$$

dir.

(ii) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$$

sağlanır.

Örnek 1.2.7.

$y = f(x) = x - [\![x]\!]$ eşitliği ile verilen

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 1.2.8.

$y = f(x) = [\![x^2]\!]$ eşitliği ile verilen

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 1.2.9.

Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonların grafiğini çiziniz.

$(i)\ f(x) = [\![-x]\!]$ $\qquad$ $(ii)\ f(x) = [\![2x]\!]$

$(iii)\ f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!]$ $\qquad$ $(iv)\ f(x) = 2[\![x]\!]$

$(v)\ f(x) = -3[\![x]\!]$ $\qquad$ $(vi)\ f(x) = |[\![-x]\!]|$

Örnek 1.2.10.

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümesini bulunuz.

$(i)\ f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ $\qquad (ii)\ f(x) = \sqrt{|x| + 4}$

$(iii)\ f(x) = \frac{x}{[\![x]\!]}$ $\qquad (iv)\ f(x) = \sqrt{|x - 1| - 2}$

$(v)\ f(x) = \sqrt{1 - [\![x]\!]}$

Tanım 1.2.11.

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; \ f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.

Örnek 1.2.12.

$y = f(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|$ fonksiyonunun belirttiği eğrinin grafiğini çiziniz.

Tanım 1.2.13.

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)} & ; \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & ; \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f fonksiyonunun işaret fonksiyonu denir ve

$$sgn\, f$$

ile gösterilir. Dolayısıyla işaret fonksiyonu

$$(sgn\, f)(x) = sgn\, f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad f(x) > 0 \\ 0 & ; \quad f(x) = 0 \\ -1 & ; \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

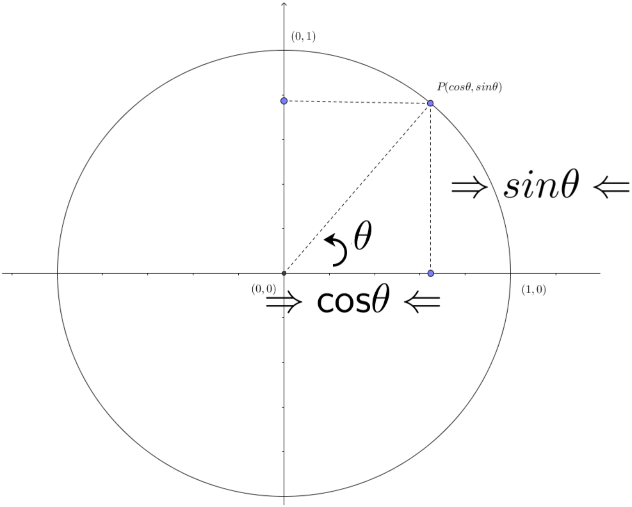
Örnek 1.2.14.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonu için

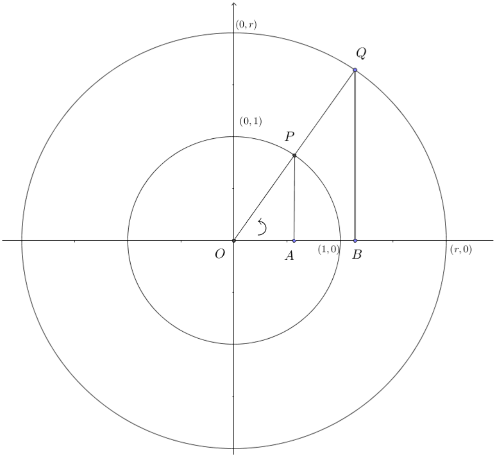
$$sgn\ f$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çemberi dikkate alalım. Çember üzerinde alınan P noktasının apsisi $\cos\theta$, ordinatı $\sin\theta$ olarak tanımlanır. Böylece herbir θ sayısına bir $\cos\theta$ ve bir $\sin\theta$ sayısı karşılık gelir.


$(0,1)$
$P(cos\theta, sin\theta)$
$\Rightarrow sin\theta \Leftarrow$
θ
$(0,0)$
$\Rightarrow \cos\theta \Leftarrow$
$(1,0)$

Daha sonra $O\,(0,0)$ merkezli birim çember ile birlikte r yarıçaplı bir başka çember daha çizelim.



Bu durumda θ açısının çemberleri kestiği noktalar P ve Q olmak üzere

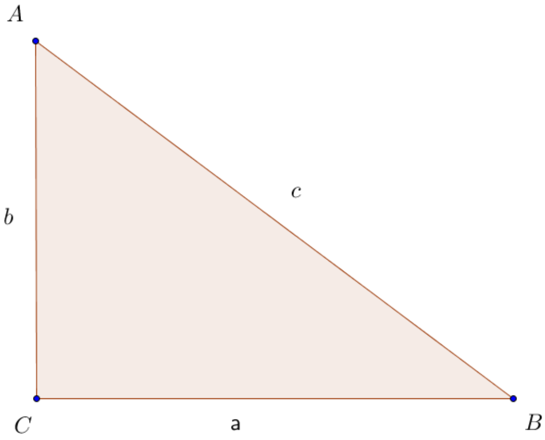
$$\sin\theta = |AP| \qquad \text{ve} \qquad \cos\theta = |OA|$$

olur. $\overset{\triangle}{POA}$ ve $\overset{\triangle}{QOB}$ üçgenlerinin benzerliğinden dolayı

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \Longrightarrow \frac{\sin\theta}{|BQ|} = \frac{1}{r} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{|BQ|}{r}$$

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \Longrightarrow \frac{\cos\theta}{|OB|} = \frac{1}{r} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{|OB|}{r}$$

elde edilir. Dolayısıyla bir dik üçgende


A
c
b
C
a
B

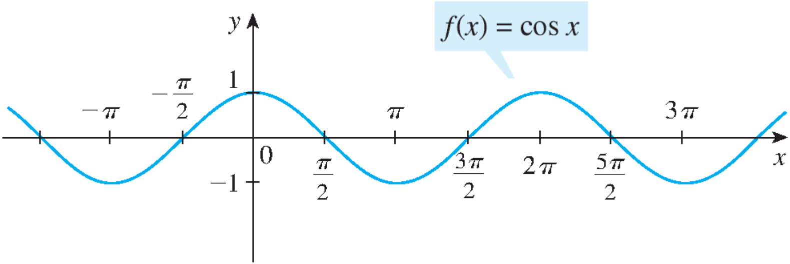
$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$

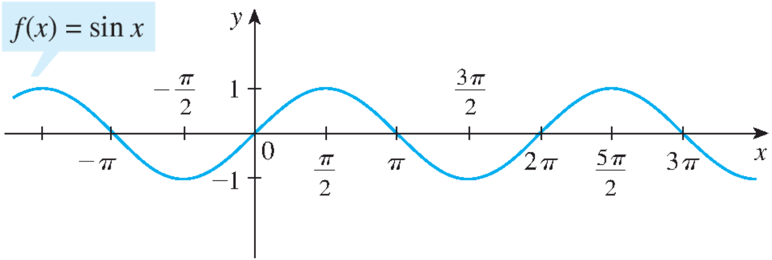
$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{a} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{b}$$

olur.

Kosinüs ve sinüs fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış değerlerini $[-1, 1]$ aralığında almaktadır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:


$f(x) = \cos x$
y
x
1
-1
0
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π


$f(x) = \sin x$
y
1
-1
0
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π

Teorem 1.3.1.

$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarına ilişkin bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir:
(i) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ .$$

(ii) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \Longrightarrow x = k\pi \\ \sin x &= 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x &= -1 \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x &= 1 \Longrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x &= -1 \Longrightarrow x = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

dir.

(iii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \sin(x \mp y) &= \sin x \cos y \mp \cos x \sin y \\ \cos(x \mp y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y \end{aligned}$$

sağlanır.
(iv) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

ve

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

gerçeklenir.

(v) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

sağlanır.
(vi) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad , \quad \cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad , \quad \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

dir.

(vii) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \text{ aralığında kesin artandır} \\ \\ \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \text{ aralığında kesin azalandır} \end{array}$$

ve

$$f(x) = \cos x \Longrightarrow \begin{array}{l} [2k\pi, \pi + 2k\pi] \text{ aralığında kesin azalandır} \\ \\ [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \text{ aralığında kesin artandır} \end{array}$$