MATEMATİK I

Fonksiyonlar

Ankara Üniversitesi

5. Hafta

Not 1.5.4.

$f(x) = a^x$ olarak tanımlı üstel fonksiyonun tanım kümesi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

ve her $x \in \mathbb{R}$ için $a^x > 0$ olduğundan görüntü kümesi

$$\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}^+$$

dır.

Not 1.5.5.

Üstel ifadelerden de bilindiği gibi aşağıdaki eşitlikler vardır:

(*i*)
$$a^0 = 1,\ a^1 = a$$

(*ii*)
$$a^{x+t} = a^x a^t$$

(*iii*)
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

(*iv*)
$$(a^x)^t = a^{xt}$$

(*v*)
$$a^x b^x = (ab)^x$$

(*vi*)
$$a^x = a^t \Longleftrightarrow x = t$$

Not 1.5.6.

Üstel fonksiyonun grafiğinden de kolayca görüleceği gibi $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu birebir örten fonksiyondur. Dolayısıyla bu fonksiyonun

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir ters fonksiyonu vardır.

Tanım 1.5.7.

$f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan üstel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonun

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

biçimindeki ters fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir ve bu fonksiyonun kuralı

$$y = \log_a x$$

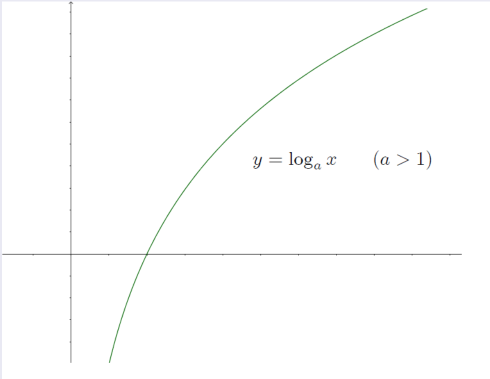
olarak yazılır. $x > 0$ için

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

dir.

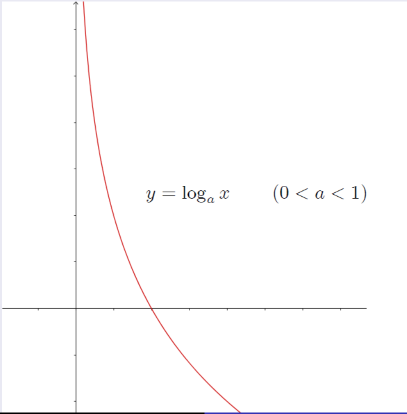
Not 1.5.8.

$a > 1$ olması durumunda logaritma fonksiyonu kesin olarak artan fonksiyondur. Bu durum için logaritma fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



Not 1.5.9.

$0 < a < 1$ olması durumunda logaritma fonksiyon kesin olarak azalan fonksiyondur. Bu durum için logaritma fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



Not 1.5.10.

$$\log_a x$$

ifadesinde a sayısına logaritma tabanı, x sayısına da logaritması alınacak sayı adı verilir. $\log_a x$ ifadesinin tanımlı olması için

$$a > 0, \quad a \neq 1 \quad \text{ve} \quad x > 0$$

olmalıdır. e tabanına göre logaritmaya doğal logaritma denir ve $\log_e x$ ifadesi yerine $\ln x$ yazılır.

Not 1.5.11.

Logaritma fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır:
(i) $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$\log_a a = 1$$

ve

$$\log_a 1 = 0$$

dir.
(ii) $k \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

dir.

(iii) $x, t \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$\log_a (xt) = \log_a x + \log_a t$$

ve

$$\log_a \left(\frac{x}{t}\right) = \log_a x - \log_a t$$

dir.

Simetrik bir küme üzerinde tanımlı her f fonksiyonu için

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

olduğundan, simetrik bir küme üzerinde tanımlı her fonksiyon biri çift diğeri tek olan fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir. O halde

$$f(x) = e^x$$

kuralı ile tanımlı

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu için

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 1.6.1.

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun çift parçasına hiperbolik kosinüs fonksiyonu

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

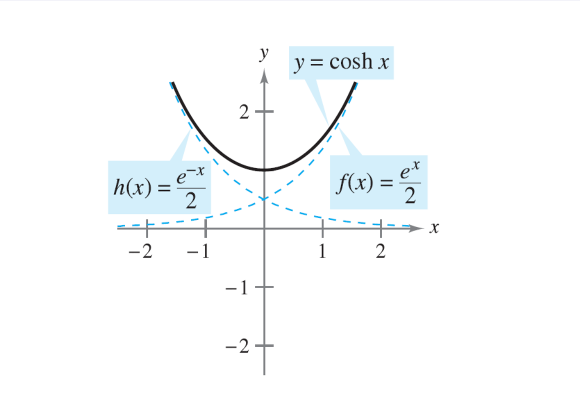
tek parçasına hiperbolik sinüs fonksiyonu

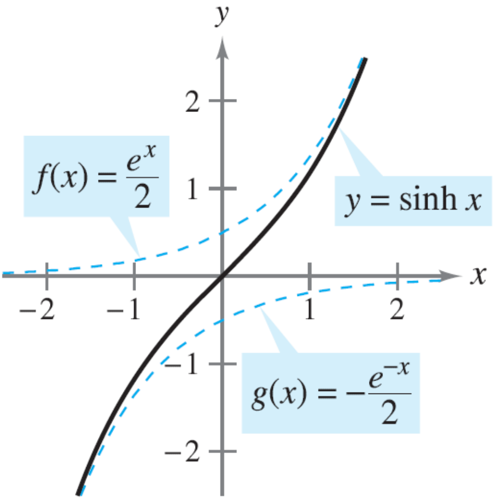
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

adı verilir.

Not 1.6.2.

$\cosh x$ ve $\sinh x$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir:




y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
$f(x) = \frac{e^x}{2}$
$y = \sinh x$
$g(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$

Grafiklerden anlaşılacağı gibi $\cosh x$ fonksiyonu çift fonksiyon olup $[0, +\infty)$ aralığında kesin olarak artan fonksiyondur; $\sinh x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup $\mathbb{R}$ üzerinde kesin olarak artan fonksiyondur.

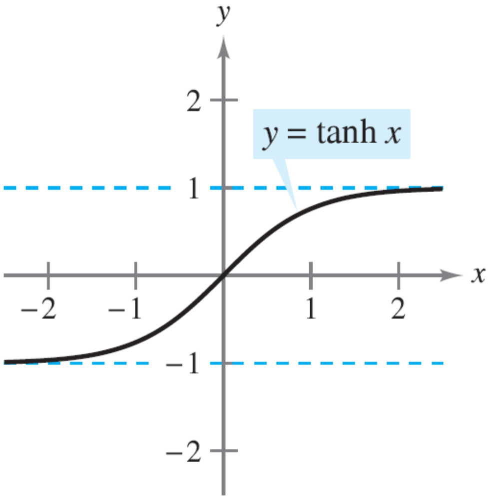
Not 1.6.3.

Diğer hiperbolik fonksiyonlar hiperbolik tanjant fonksiyonu ve hiperbolik kotanjant fonksiyonu sırasıyla

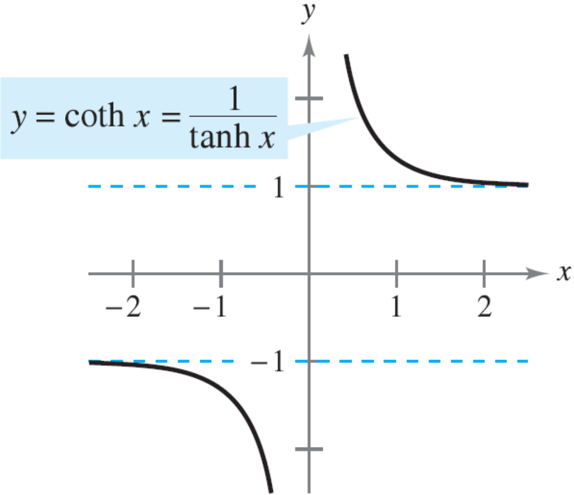
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

şeklinde olup fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:



y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
y = tanh x


$y = \coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$
y
x
1
−1
−2
−1
1
2

Grafiklerden anlaşılacağı gibi $\tanh x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup $\mathbb{R}$ üzerinde kesin olarak artan fonksiyondur; $\coth x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıkları üzerinde kesin olarak azalan fonksiyondur.

Not 1.6.4.

Hiperbolik fonksiyonların terslerini elde etmek için bu fonksiyonları birebir ve örten olduğu aralıklara kısıtlayalım. O halde

$$\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$$

$$\sinh : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

$$\tanh : (-\infty, +\infty) \to (-1, 1)$$

$$\coth : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$$

olur. Bu fonksiyonların ters fonksiyonları $\arccos h\ x$, $\arcsin h\ x$, $\arctan h\ x$ ve $\operatorname{arccot} h\ x$ fonksiyonlarıdır.