

MATEMATİK I

Limit ve Süreklilik

Ankara Üniversitesi

7. Hafta

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Not 2.1.18.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ise x değişkeninin b noktasına yaklaşması sadece soldan mümkün olacağından

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

ifadesi mevcut olması durumunda

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

dir. Benzer olarak

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ifadesi mevcut olması durumunda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

dir.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Tanım 2.1.19.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir M sayısı var öyle ki

$$x > M$$

olacak şekilde her x sayısı için

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sağlanıyorsa bu durumda x değişkeni $+\infty$ ifadesine yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.20.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{x} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Tanım 2.1.21.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (-\infty, c) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir N sayısı var öyle ki

$$x < N$$

olacak şekilde her x sayısı için

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sağlanıyorsa bu durumda x değişkeni $-\infty$ ifadesine yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.22.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.23.

$a \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.24.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\llbracket x \rrbracket}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + x - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{4x^2 + 8x + 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + 3}$$

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Not 2.1.25.

Yukardaki örneklerden görüldüğü gibi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & ; n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & ; n = m \\ \left(\operatorname{sgn} \frac{a_n}{b_m} \right) \cdot (+\infty) & ; n > m \end{cases}$$

olur.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.26.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

ifadelerini hesaplayınız.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Tanım 2.1.27.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ve a noktada A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $B > 0$ sayısı için eğer

$$0 < |x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her x sayısı için

$$f(x) > B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti $+\infty$ ifadesidir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

biçiminde gösterilir.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Tanım 2.1.28.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ve a noktasıda A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $K > 0$ sayısı için eğer

$$0 < |x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her x sayısı için

$$f(x) < K$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti $-\infty$ ifadesidir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

biçiminde gösterilir.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Not 2.1.29.

Sağ ve sol taraflı limitler de benzer şekilde tanımlanır. Yukardaki tanımlarda

$$0 < |x - a| < \delta$$

yerine

$$a - \delta < x < a$$

alınırsa sol taraflı limitin tanımı,

$$a < x < a + \delta$$

alınırsa sağ taraflı limitin tanımı elde edilir.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.30.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x-1}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{x-1}$$

ifadelerini hesaplayınız.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Teorem 2.1.31.

a noktasının delinmiş komşuluğundaki her x sayısı için

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

ise bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

olur.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.32.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 2.1.33.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

2. Limit ve Süreklilik

2.1. Limit

Örnek 2.1.34.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{3}{x} \right)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$