MATEMATİK I

Limit ve Süreklilik

Ankara Üniversitesi

8. Hafta

Not 2.1.35.

Aşağıda bazı limit kuralları verilmiştir:

(i) $a > 1$ için

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

dır.

(ii) $0 < a < 1$ için

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

dur.

(iii)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

mevcut ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

dir.

(iv) n tek doğal sayı ise ya da n çift doğal sayı olduğunda a noktasının bir komşuluğunda $f(x) \geq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

dir.

(v) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ve a noktasının bir komşuluğunda $g(x)$ sınırlı ise

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right] = 0$$

dır.

(vi)

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0\ , \quad \lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty \ \text{ ve } \ \lim_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = \lambda$$

ise

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+u(x)\right]^{v(x)} = e^{\lambda}$$

dır.

Örnek 2.1.36.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}+\frac{3}{x}\right]$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(iv)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+4}\right)^{2x+3}$$

Tanım 2.2.1.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A kümesi üzerinde süreklidir denir.

Yukardaki tanıma göre, bir f fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için

(i) f fonksiyonu a noktasında tanımlı olmalıdır,

(ii) f fonksiyonunun a noktasında limiti olmalıdır,

(iii) Fonksiyonun a noktasındaki limiti, fonksiyonun a noktasındaki değerine eşit olmalıdır.

Tanım 2.2.2.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $x \in A$ için

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

Örnek 2.2.3.

$f(x) = x - [\![x]\!]$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli midir? Açıklayınız.

Örnek 2.2.4.

$f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her noktada sürekli olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.2.5.

$\mathbb{R}$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Tanım 2.2.6.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse fonksiyon a noktasında süreksizdir denir. Bir fonksiyon bir a noktasında süreksiz ise şu durumlardan biri mevcuttur:

(1)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

ifadesi mevcut fakat bu limit, fonksiyonun a noktasındaki değeri olan $f(a)$ dan farklı olabilir ya da fonksiyon a noktasında tanımlı olmayabilir. Bu durumdaki fonksiyonun a noktasındaki süreksizliğine kaldırılabilir süreksizlik adı verilir.

(2)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ifadeleri mevcut ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ise bu durumdaki fonksiyonun a noktasındaki süreksizliğine sıçrama süreksizliği adı verilir.

$$J = \left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right|$$

sayısına f fonksiyonunun a noktasındaki sıçraması adı verilir.

(3)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ifadelerinden en az biri $+\infty$ ya da $-\infty$ ya da mevcut değilse bu durumdaki fonksiyonun a noktasındaki süreksizliğine sonsuz süreksizlik adı verilir.

Tanım 2.2.7.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in A$ olsun.
(i)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında sağdan süreklidir denir.
(ii)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında soldan süreklidir denir.

Teorem 2.2.8.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonun a noktasında sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.

Not 2.2.9.

$[a, b]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonu aralığın iç noktalarında sürekli, a noktasında sağdan sürekli, b noktasında soldan sürekli olması durumunda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında süreklidir denilecektir.

Örnek 2.2.10.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x \geq 1 \\ 2x - x^2 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun $x = 1$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Teorem 2.2.11.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ ile $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha f + \beta g \qquad \text{ve} \qquad f \cdot g$$

fonksiyonları da a noktasında süreklidir. Ayrıca, eğer $g(a) \neq 0$ ise

$$\frac{f}{g}$$

fonksiyonu da a noktasında süreklidir.