MATEMATİK I

Türev

Ankara Üniversitesi

11. Hafta

Teorem 3.4.1.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer

$$g : f\left([a, b]\right) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $f\left(x_0\right)$ noktasında türevlenebilir ise bu durumda

$$g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ve

$$\left(g \circ f\right)'\left(x_0\right) = g'\left(f\left(x_0\right)\right) f'\left(x_0\right) \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Not 3.4.2.

Teorem 3.4.1 -in koşulları sağlansın. Bu durumda

$$z = g(y) \quad \text{ve} \quad y = f(x)$$

denilirse (3.3) ifadesi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu nedenle bileşke fonksiyonun (3.4) şeklinde türev alma kuralına zincir kuralı denir.

Bu kural daha karışık bileşke fonksiyonlar için de kullanılır. Örneğin;

$$y = f\left(u\left(v\left(w\left(x\right)\right)\right)\right)$$

şeklinde bileşke fonksiyon verilirse ve gerekli türevlenebilme şartları sağlanırsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}$$

olur.

Örnek 3.4.3.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

$(a)\ f(x) = \sin\left(x^2\right)$

$(b)\ f(x) = \tan^5(2x-1)$

$(c)\ f(x) = \sin^4(\cos(x+2))$

Teorem 3.5.1.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve artan (veya azalan) olsun. Eğer f fonksiyonu $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0)\neq 0$ ise f fonksiyonunun

$$\begin{aligned} f^{-1} &: \left(f\left(a^{+}\right), f\left(b^{-}\right)\right)\to\mathbb{R} \\ (\text{veya } f^{-1} &: \left(f\left(b^{-}\right), f\left(a^{+}\right)\right)\to\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$x=f^{-1}(y)$ ters fonksiyonu da $y_0=f(x_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

şeklindedir.

Örnek 3.5.2.

$f(x) = x^3 + x$ eşitliği ile tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left(f^{-1}\right)'(2)$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 3.5.3.

(a) $|y| < 1$ için

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

şeklindedir.

(b) $|y| < 1$ için

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

şeklindedir.

(c) $y \in \mathbb{R}$ için

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

şeklindedir.
(d) $y \in \mathbb{R}$ için

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2}$$

şeklindedir.

$a > 0$ $(a \neq 1)$ olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun türevini araştıralım:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\ &= a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\\ &= a^x\ln a\end{aligned}$$

olup her $x\in\mathbb{R}$ için

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

bulunur.

Not 3.6.1.

Özel olarak $a=e$ alınırsa her $x\in\mathbb{R}$ için

$$(e^x)'=e^x$$

olur.

$a > 0$ $(a \neq 1)$ olmak üzere

$$f(x) = \log_a |x|$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevini araştıralım:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a|x+h|-\log_a|x|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left|1+\frac{h}{x}\right|}{h}\\
&= \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{x}\frac{\log_a|1+k|}{k}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\left(\log_a|1+k|^{\frac{1}{k}}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{r\to+\infty}\left(\log_a\left|1+\frac{1}{r}\right|^{r}\right)\\
&= \frac{1}{x}\log_a\left|\lim_{r\to+\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}\right|\\
&= \frac{1}{x}\log_a e
\end{aligned}
$$

olup her $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

elde edilir.

Not 3.7.1.

Özel olarak $a = e$ alınırsa her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

olur.

Örnek 3.7.2.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $y = f(x) = \ln(\sin x)$

(b) $y = f(x) = \log_3 (x^2 - 1)$

(c) $y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$; $(a \neq 0)$

(d) $y = f(x) = e^{\sin\left(x^3\right)}$

Teorem 3.8.1.

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}^+$$

ve

$$g : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları $x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir ise

$$f^g : (a,b) \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu da $x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^g\right)'(x_0) = [f(x_0)]^{g(x_0)} \left\{ g'(x_0) \ln f(x_0) + g(x_0) \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right\}$$

şeklindedir.

Örnek 3.8.2.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $x > 0$ olmak üzere

$$y = y(x) = x^{\sin x}$$

(b) $x \in (0, 1)$ olmak üzere

$$y = y(x) = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$$

Hiperbolik fonksiyonların

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

şeklinde tanımlandığı bilinmektedir.

Buna göre
(i) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\sinh x)' = \cosh x \ ,$$

(ii) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\cosh x)' = \sinh x \ ,$$

(iii) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \ ,$$

(iv) Her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

şeklindedir.

Tanım 3.10.1.

$y = f(x)$ fonksiyonunda x ve y değişkenleri üçüncü bir t değişkeninin

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad ; \qquad t \in (\alpha, \beta) \tag{3.5}$$

fonksiyonları yardımıyla veriliyorsa f fonksiyonu parametrik şekilde verilmiştir denir, burada t değişkenine parametre adı verilir.

Teorem 3.10.2.

φ ve ψ fonksiyonları $t_0 \in (\alpha, \beta)$ noktasının bir $U(t_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda türevlenebilir olsun. Eğer;
(i) $\dot{\varphi}(t_0) = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) \neq 0$,
(ii) φ fonksiyonunun $x_0 = \varphi(t_0)$ noktasının bir $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı $t = \varphi^{-1}(x)$ ters fonksiyonu varsa,
bu durumda (3.5) fonksiyonları yardımıyla parametrik şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu $x_0 = \varphi(t_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$f'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)}$$

şeklindedir.

Örnek 3.10.3.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\,(t-\sin t) \\ y & = & a\,(1-\cos t) \end{array}\right. \quad ; \quad t\in(0,2\pi)$$

parametrik denklemi ile verilen $y=y\,(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Tanım 3.11.1.

x ile $y = f(x)$ arasındaki ilişki

$$F(x, y) = 0$$

biçimindeki bir eşitlik ile verilmişse f fonksiyonuna kapalı formda verilmiş fonksiyon adı verilir.

Örnek 3.11.2.

$$x^2 + 2xy - y^2 = 4x$$

kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu her $x \in [a,b]$ noktasında türevlenebiliyorsa bu durumda $[a,b]$ aralığında tanımlı olan ve f fonksiyonunun türev fonksiyonu denilen yeni bir

$$f' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu meydana geldiği bilinmektedir.

Tanım 3.12.1.

$f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebiliyorsa bu durumda

$$(f')' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun 2 -inci mertebeden (basamaktan) türevi adı verilir ve

$$y'' \quad \text{veya} \quad f''(x) \quad \text{veya} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{veya} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

sembollerinden biri ile gösterilmektedir.

Tanım 3.12.2.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $(n-1)$ -inci mertebeden türevlenebilir olsun.

$$f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında türevlenebiliyorsa bu fonksiyonun

$$\left(f^{(n-1)}\right)' : [a, b] \to \mathbb{R}$$

türev fonksiyonuna f fonksiyonunun n -inci mertebeden türevi denir ve

$$y^{(n)} \quad \text{veya} \quad f^{(n)}(x) \quad \text{veya} \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{veya} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

sembollerinden biri ile gösterilmektedir.

Örnek 3.12.3.

Aşağıdaki fonksiyonların n -inci mertebeden türevlerini bulunuz.
(a) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^\alpha$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \sin x$,
(c) $a > 0$, $a \neq 1$ ve $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \log_a |x|$.

Örnek 3.12.4.

$$\begin{cases} x & = & 2t - t^2 \\ y & = & 3t - t^3 \end{cases}$$

parametrik denklemi ile tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun 2 -inci mertebeden türevini bulunuz.

Tanım 3.13.1.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in [a, b]$ noktası verilmiş olsun. $x_0 + h \in [a, b]$ olacak şekildeki her $h \neq 0$ için

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = B(x_0).h + \varphi(x_0; h) \tag{3.6}$$

eşitliğini sağlayan
(i)

$$h \to B(x_0).h$$

lineer fonksiyonu (h değişkenine göre) var,
(ii)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0; h)}{h} = 0$$

koşulunu gerçekleyen $\varphi(x_0; h)$ fonksiyonu var ise f fonksiyonu x_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Bu durumda

$$h \to B(x_0).h$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun x_0 noktasındaki diferensiyeli adı verilir ve $df(x_0)$, yani

$$(df(x_0))(h) = B(x_0).h \ , \tag{3.7}$$

biçiminde gösterilir.

Not 3.13.2.

$x_0 \in [a, b]$ için (3.6) ifadesi dikkate alınırsa

$$B(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

olduğuna göre (3.7) ifadesinden

$$(df(x_0))(h) = f'(x_0).h \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan bu ifadede özel olarak $f(x) = x$ seçilirse $f'(x) = 1$ olup

$$(dx)(h) = 1.h = h$$

ve dolayısıyla (3.8) ifadesi

$$(df(x_0))(h) = f'(x_0).(dx)(h)$$

veya

$$df(x_0) = f'(x_0).dx$$

veya

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

şeklini alır.