# MATEMATİK I

## Türev

Ankara Üniversitesi

14. Hafta

**Teorem 3.18.1. (L' Hospital Kuralı)**

$\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ ve

$$f, g : \mathring{U}_\delta(a) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

$(i)$ $f$ ve $g$ fonksiyonları $\mathring{U}_\delta(a)$ kümesinde türevlenebilir,

$(ii)$ Her $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ için $g'(x) \neq 0$,

$(iii)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

olsun.

Eğer

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{3.13}$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.14}$$

gerçeklenir.

**Not 3.18.2.**

Teorem 3.18.1 -deki önermenin karşıtı genellikle doğru değildir. Örneğin; $a = 0$ olmak üzere

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ve} \quad g(x) = \sin x$$

fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \\
&= \left[\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right] \left[\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\
&= 1.0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olmasına rağmen

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

ifadesi mevcut değildir.

### Not 3.18.3.

$f'$ ve $g'$ türev fonksiyonları Teorem 3.18.1 -in hipotezlerini sağlıyorsa bu durumda L' Hospital kuralı bir defa daha uygulanabilir, yani

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

yazılabilir. Bir başka deyişle; belirsizlikten kurtuluncaya kadar L' Hospital kuralı uygulanmaya devam edilir.

Örneğin;

$(a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

$(b)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2} &= \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{24x}{2\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{12}{\cos x}\\ &= 12\end{aligned}$$

### Teorem 3.18.4. (L' Hospital Kuralı)

$\Delta > 0$ olmak üzere
$(a)$

$$f, g : (\Delta, +\infty) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları için
$(i)$ $f$ ve $g$ fonksiyonları $(\Delta, +\infty)$ aralığında türevlenebilir,
$(ii)$ Her $x \in (\Delta, +\infty)$ için $g'(x) \neq 0$,
$(iii)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

olsun.

Eğer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gerçeklenir.

$(b)$

$$f, g : (-\infty, -\Delta) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları için
$(i)$ $f$ ve $g$ fonksiyonları $(-\infty, -\Delta)$ aralığında türevlenebilir,
$(ii)$ Her $x \in (-\infty, -\Delta)$ için $g'(x) \neq 0$,
$(iii)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

olsun.

Eğer

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

limiti varsa ($A\in\mathbb{R}$ veya $A=\pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gerçeklenir.

**Örnek 3.18.5.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

ifadesini hesaplayınız.

**Teorem 3.18.6. (L' Hospital Kuralı)**

$\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ ve

$$f, g : \mathring{U}_{\delta}(a) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

$(i)$ $f$ ve $g$ fonksiyonları $\mathring{U}_{\delta}(a)$ kümesinde türevlenebilir,

$(ii)$ Her $x \in \mathring{U}_{\delta}(a)$ için $g'(x) \neq 0$,

$(iii)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \quad (veya \;\; -\infty)$$

olsun.

Eğer

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

limiti varsa ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), bu durumda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti de mevcuttur ve

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gerçeklenir.

### Not 3.18.7.

Teorem 3.18.4 -de olduğu gibi, belirli şartlar altında Teorem 3.18.6 -nın $x \to +\infty$ ( veya $x \to -\infty$) durumlarında da doğru olduğu gösterilebilir.

### Not 3.18.8.

$\infty - \infty$, $0.\infty$, $0^0$, $\infty^0$ ve $1^\infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeler uygun işlemler yapılarak

$$\frac{0}{0} \quad \text{ya da} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

biçimindeki belirsizlik oluşturan ifadelerden birine dönüştürülebilir.

Örneğin;

$(i)$

$$f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}\frac{1}{f}}$$

eşitliği yardımıyla $\infty-\infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifade $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeye dönüştürülebilir.

$(ii)$

$$f.g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$$

eşitliği yardımıyla $0.\infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifade $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeye dönüştürülebilir.

$(iii)$ $y = [f(x)]^{g(x)}$ ifadesinde $0^0$ $\left(\infty^0 \text{ } veya \text{ } 1^\infty\right)$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifade varsa

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

eşitliği yardımıyla bu belirsizlik $0.\infty$ şeklinde belirsizlik oluşturan ifadeye dönüştürülebilir.

**Tanım 3.19.1.**

$(i)$ $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - b] = 0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - b] = 0$$

ise

$$y = b$$

doğrusuna $x \to +\infty$ (ya da $x \to -\infty$) iken $f$ fonksiyonunun yatay asimtotu adı verilir.

$(ii)$ $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

ise

$$y = ax + b$$

doğrusuna $x \to +\infty$ (ya da $x \to -\infty$) iken $f$ fonksiyonunun eğik asimtotu adı verilir.

$(iii)$ $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

ifadelerinden en az biri sağlanıyorsa

$$x = c$$

doğrusuna $f$ fonksiyonunun düşey asimtotu adı verilir.

**Teorem 3.19.2.**

$$y = ax + b$$

doğrusunun $x \to +\infty$ iken $f$ fonksiyonunun eğik asimtotu olması için gerek ve yeter şart

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{ve} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

olmasıdır.

**Not 3.19.3.**

Benzer şekilde;

$$y = ax + b$$

doğrusunun $x \to -\infty$ iken $f$ fonksiyonunun eğik asimtotu olması için gerek ve yeter şart

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{ve} \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$$

olmasıdır.

**Örnek 3.19.4.**

$$\begin{aligned}(a)\ y &= f(x) = \frac{1}{x}\\(b)\ y &= f(x) = \arctan x\\(c)\ y &= f(x) = \operatorname{arccot} x\end{aligned}$$

fonksiyonlarının yatay asimtotlarını bulunuz.

## Örnek 3.19.5.

$$
\begin{aligned}
(a)\ y &= f(x) = x^{-\frac{2}{3}} \\
(b)\ y &= f(x) = \log_a x \\
(c)\ y &= f(x) = \tan x \\
(d)\ y &= f(x) = \cot x
\end{aligned}
$$

fonksiyonlarının düşey asimtotlarını bulunuz.

### Örnek 3.19.6.

Aşağıda verilen fonksiyonların, eğer varsa, asimtotlarını bulunuz.
$(a)$ $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$$

$(b)$ $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Bir fonksiyonun grafiğini oluşturmak için genel olarak aşağıdaki adımlar izlenebilir:

(1) Fonksiyonun $\mathcal{D}(f)$ tanım kümesi bulunur.

(2) Fonksiyonun, eğer varsa, asimtotları bulunur.

(3) Grafiğin eksenleri kestiği noktalar bulunur.

(4) Fonksiyonun monotonluk aralıkları, ekstremum noktaları ve ekstremum değerleri bulunur.

(5) Fonksiyonun konvekslik ve konkavlık karakterleri belirlenip, eğer varsa, büküm noktaları bulunur.

(6) Yukarda bulunan bilgiler kullanılarak

$$x,\ f(x),\ f'(x),\ f''(x)$$

ifadelerinin sıralandığı bir tablo yapılır ve bu tabloya göre fonksiyonun grafiği çizilir.

**Örnek 3.20.1.**

$$y = f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.