MATEMATİK II

Belirsiz İntegraller

Ankara Üniversitesi

2. Hafta

x -in polinomlarını $P(x)$ ve $Q(x)$ göstersin. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

yazılabilir, burada $R(x)$ ve $K(x)$ birer polinom olup $R(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden küçüktür. O halde

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyonun integrallenmesi, payının derecesi paydasının derecesinden küçük olan

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyonun integrallenmesine indirgenir.

Diğer taraftan

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

ifadesi $b^2 - 4ac < 0$ ve $n > 1$ olmak üzere basit kesir denilen

$$\frac{M}{px+q}, \quad \frac{N}{(px+q)^n}, \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \text{ ve } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

biçimindeki bazı kesirlerin toplamı olarak yazılabilir. O halde

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

integrali yukardaki basit kesirlerin integraline indirgenmiş olur.

Örnek 1.2.6.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\ \int \frac{1}{3x+2}dx \qquad (ii)\ \int \frac{2}{(5x+1)^3}dx$$

$$(iii)\ \int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx \qquad (iv)\ \int \frac{4}{x^2-4}dx$$

$$(v)\ \int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$$

Örnek 1.2.7.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\ \int \frac{-2x+4}{(1+x^2)\,(x-1)^2}dx \qquad (ii)\ \int \frac{2x^4-6x^3+7x^2-2x-2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$$

(I)

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx,\ \int \sin(ax)\cos(bx)\,dx,$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx$$

tipindeki integraller

$$\begin{aligned}
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\right\} \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\right\} \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\right\}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden faydalanılarak hesaplanır.

Örnek 1.2.8.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\ \int \sin 4x \sin 7x\ dx$$

$$(ii)\ \int \sin 5x \cos 3x\ dx$$

$$(iii)\ \int \cos 4x \cos 3x\ dx$$

(II)

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

tipindeki integraller m ve n doğal sayılarının durumuna göre farklı yollarla hesaplanır:

(i)

$$\begin{cases} m \text{ tek ise} & \cos x = t \\ n \text{ tek ise} & \sin x = t \end{cases}$$

dönüşümü uygulanır.

Örnek 1.2.9.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

(a) $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

(b) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

(c) $\int \sin^9 x \cos^3 x \, dx$

(ii) m ve n sayılarının her ikiside çift ise

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla kuvvetler düşürülür.

Örnek 1.2.10.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Bir fonksiyonun pay ve paydası değişkenleri $\sin x$ ve $\cos x$ olan birer polinom ise bu fonksiyonlara $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının bir rasyonel fonksiyonudur denir. Örneğin;

$$f(x) = \frac{\sin^3 x + \sin x \cos^2 x}{1 + \sin x + \cos x} \quad ve \quad g(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x + 3}$$

fonksiyonları $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının rasyonel fonksiyonudur. Bu tip fonksiyonlar kısaca $\mathcal{R}(\sin x, \cos x)$ ile gösterilecektir.

(III)

$$\int \mathcal{R}\left(\sin x, \cos x\right) dx$$

tipindeki integraller için

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{R}\left(-\sin x, \cos x\right) = -\mathcal{R}\left(\sin x, \cos x\right) & \Longrightarrow & \cos x = t \\
\mathcal{R}\left(\sin x, -\cos x\right) = -\mathcal{R}\left(\sin x, \cos x\right) & \Longrightarrow & \sin x = t \\
\mathcal{R}\left(-\sin x, -\cos x\right) = \mathcal{R}\left(\sin x, \cos x\right) & \Longrightarrow & \tan x = t
\end{array}$$

değişken değiştirmeleri yapılır.

Örnek 1.2.11.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx \qquad (b)\ \int \cos^3 x \tan^5 x\, dx$$

$$(c)\ \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x}\, dx$$

(I)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ **Tipindeki İntegrallerin Hesabı**

Bu tip integrallerin hesaplanması a, b, c sayılarının değerine göre değişir:

(i) $b^2 - 4ac > 0$ ve $a < 0$ ise köklü ifadenin içi $k^2 - u^2$ ifadesine dönüştürülebilir ve

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{k}\right) + C$$

ifadesi ile integral hesaplanır.

(ii) $b^2 - 4ac > 0$ ve $a > 0$ ise köklü ifadenin içi $u^2 - k^2$ ifadesine dönüştürülebilir ve

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - k^2}\right) + C$$

ifadesi ile integral hesaplanır.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ ve $a > 0$ ise köklü ifadenin içi $u^2 + k^2$ ifadesine dönüştürülebilir ve

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + k^2}\right) + C$$

ifadesi ile integral hesaplanır.

(iv) $b^2 - 4ac = 0$ ve $a > 0$ ise $ax^2 + bx + c$ ifadesi bir tam kare olup kök dışına çıkarılarak integral hesaplanır.

Örnek 1.2.12.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

$$(b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

$$(c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$$

(II)

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$ **Tipindeki İntegrallerin Hesabı**

Aşağıdaki yapılan cebirsel işlemlerden

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx &= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+2a\frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\
&= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b-b+2a\frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\
&= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\
&\quad + \int \frac{n-\frac{mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\
&= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \\
&\quad + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}
\end{aligned}$$

verilen tipten integralin (I) tipinde integrale indirgendiği görülür.

Örnek 1.2.13.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\ \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \qquad (b)\ \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$$

(III)

$$\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$ **Tipindeki İntegrallerin Hesabı**

Bu tip integrallerde

$$\frac{1}{px+q} = t$$

değişken değiştirmesi yapıldığında (I) tipinde integral elde edilir.

(IV)

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$ **Tipindeki İntegrallerin Hesabı**

Bu tip integralde $P_n(x)$ polinomu n -inci dereceden bir polinomdur. $Q_{n-1}(x)$ polinomu $(n-1)$ -inci dereceden bilinmeyen katsayılı bir polinom ve λ bir reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx &= Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} \\ &\quad +\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte her iki tarafın x değişkenine göre türevi alınır ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse $Q_{n-1}(x)$ polinomunun katsayıları ve λ reel sayısı bulunur. Geriye eşitliğin sağındaki (I) tipindeki integrali hesaplamak kalır.

Örnek 1.2.14.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\ \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+3}}dx \qquad (b)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

(V)

$\displaystyle\int \frac{1}{(x-p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ **Tipindeki İntegrallerin Hesabı**

Bu tip integrallerde

$$\frac{1}{x-p}=t$$

değişken değiştirmesi yapılırsa (IV) tipinde bir integral elde edilir.

Örnek 1.2.15.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-2}}$$

integralini hesaplayınız.