

MATEMATİK II

Belirli İntegraller

Ankara Üniversitesi

4. Hafta

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Teorem 2.2.1.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun.

(a) f fonksiyonu sürekli ise integrallenebilirdir.

(b) f parçalı sürekli fonksiyon ise integrallenebilirdir.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Teorem 2.2.2. (İntegral Hesabın Temel Teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyon olsun.
 $\forall x \in (a, b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak şekilde bir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mevcut ise

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dır.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Not 2.2.3.

$F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunu bulmak demek f fonksiyonunun belirsiz integralini bulmak demektir. O halde

$$\int_a^b f(x) dx$$

integralini hesaplamak için önce $\int f(x) dx$ belirsiz integrali hesaplanacak sonra $F(x)$ ifadesinde x yerine önce b üst sınırı, sonra a alt sınırı konulacak ve $F(b) - F(a)$ farkı hesaplanacaktır. $F(b) - F(a)$ ifadesi

$$F(x) \Big|_a^b$$

biçiminde de gösterilebilir.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Örnek 2.2.4.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a) \int_0^1 x^2 dx$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} x \sin x dx$$

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Tanım 2.2.5.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonu için

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

olur.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Teorem 2.2.6.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olsun.

(i) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(z) dz$$

(ii) $c \in (a, b)$ için

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

dir.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Örnek 2.2.7.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a) \int_0^2 x \llbracket x \rrbracket dx$$

$$(b) \int_{-1}^1 x \operatorname{sgn} x dx$$

$$(c) \int_{-1}^2 |x| \llbracket x \rrbracket dx$$

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Teorem 2.2.8. (Değişken Değiştirme Yöntemi)

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevelenebilir fonksiyon ve f fonksiyonu da φ fonksiyonunun görüntü kümesi üzerinde sürekli ise

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

dir.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Örnek 2.2.9.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a) \int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t \sin \sqrt{t}}} dt$$

$$(b) \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$$

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Teorem 2.2.10.

u ve v fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli türevlenebilir ise

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

olur.

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Örnek 2.2.11.

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx$$

ifadesini hesaplayınız.