MATEMATİK II

Belirli İntegraller

Ankara Üniversitesi

5. Hafta

2.2. Belirli İntegrallerle İlgili Temel Teoremler

Teorem 2.2.12.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$(i)\ \forall x \in [a, b] \text{ için } f(x) \geq 0 \text{ ise } \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \text{ dır.}$$

$$(ii)\ \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ gerçeklenir.}$$

Teorem 2.2.13.

$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda

(i) f fonksiyonu tek fonksiyon ise $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

(ii) f fonksiyonu çift fonksiyon ise $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

gerçeklenir.

Örnek 2.2.14.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3 \cos x}{1+\sin^{10} x} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 2.2.15.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığında

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f fonksiyonunun sürekli olduğu her noktada türevlenebilirdir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

Not 2.2.16.

$y = f(u)$, $u = g(x)$ olduğunda zincir kuralından

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)\,u'(x)$$

yazılabilir.

Buna göre

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(u(x))\,u'(x)$$

bulunur.

$$G(x) = \int_{v(x)}^{a} f(t)\,dt$$

ise

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_a^{v(x)} f(t)\,dt \right) = -f(v(x))\,v'(x)$$

olur.

Diğer taraftan

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = \int_{v(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt$$

olarak yazılabileceğinden

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$$

elde edilir. Bu bağıntıya Leibniz formülü adı verilir.

Örnek 2.2.17.

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} \sin\left(t^2\right) dt$$

olmak üzere $F'(x)$ ifadesini hesaplayınız.

Örnek 2.2.18.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_{0}^{x} \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

ifadesini hesaplayınız.

Tanım 2.2.19.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon olsun.

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

sayısına f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalaması adı verilir.

Teorem 2.2.20.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a, b)$ sayısı vardır.

Teorem 2.2.21.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında aynı işaretli ve sürekli olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(x_0) \int_a^b g(x)\, dx$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ sayısı vardır.

Örnek 2.2.22.

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2} dx < \frac{1}{8}$$

olduğunu gösteriniz.