MATEMATİK II

Kuvvet Serisi ve Taylor Serisi

Ankara Üniversitesi

13. Hafta

Tanım 6.1.1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + ... \tag{6.1}$$

biçiminde yazılan serilere kuvvet serisi adı verilir, burada x değişken olup c_k sabitleri serinin katsayılarıdır.

Not 6.1.2.

Sabitlenmiş herbir x değeri için bir kuvvet serisinin bir sayı serisi olduğu açıktır. Dolayısıyla daha önce verilen kriterler kullanılarak sabitlenmiş herbir x değeri için bu kuvvet serisinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı test edilebilir. Bir kuvvet serisi bazı x değerleri için yakınsak ve bazı x değerleri için ıraksak olabilir. Ancak, herhangi bir kuvvet serisinin en az bir x değeri için yakınsak olduğu bilinmektedir. Gerçekten, (6.1) ifadesinde $x = a$ alınırsa $k \geq 1$ için terimlerin sıfır olduğu görülmektedir. Bu nedenle bir kuvvet serisi $x = a$ için yakınsaktır.

Örnek 6.1.3.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

geometrik serisi $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{1-x}$$

fonksiyonuna yakınsar. Yukarıda belirtilen seri $|x| \geq 1$ için ıraksaktır.

Not 6.1.4.

Bir kuvvet serisinin toplamı, tanım kümesi serinin yakınsak olduğu x noktalarının oluşturduğu küme olan bir f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

tanımladığına dikkat edilmelidir.

Örnek 6.1.5.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

serisi x değişkeninin hangi değerleri için yakınsaktır.

Örnek 6.1.6.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(x-5)^k$$

serisi x değişkeninin hangi değerleri için yakınsaktır.

Örnek 6.1.7.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 3^k} x^k$$

serisi x değişkeninin hangi değerleri için yakınsaktır.

Not 6.1.8.

Yukarıdaki örneklerde bir kuvvet serisinin hangi durumlarda yakınsak olduğu görülmektedir. Örnek 6.1.5 de verilen kuvvet serisi her yerde yakınsaktır. Örnek 6.1.6 da verilen kuvvet serisi sadece bir noktada yakınsaktır. Son olarak, Örnek 6.1.7 de verilen kuvvet serisi sonlu bir aralıkta yakınsaktır. Aşağıdaki teorem bu üç durumdan başka bir durumun olamayacağını ifade etmektedir.

Teorem 6.1.9.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

kuvvet serisi için aşağıdaki üç durum vardır:
(i) Kuvvet serisi sadece $x = a$ noktasında yakınsaktır.
(ii) Kuvvet serisi her x noktasında yakınsaktır.
(iii) $R > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$|x-a| < R$$

için seri yakınsak,

$$|x-a| > R$$

için seri ıraksaktır.

Not 6.1.10.

(iii) durumunda verilen R sabitine yakınsaklık yarıçapı denir. Kuvvet serisi x değişkeninin tüm değerleri için yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı sonsuz $(R = \infty)$ olarak ifade edilecektir. Kuvvet serisi sadece $x = a$ noktasında yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı sıfır $(R = 0)$ olarak ifade edilecektir. Bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı, serinin yakınsadığı tüm x noktalarından oluşan aralıktır. Dolayısıyla (i) durumunda yakınsaklık aralığı tek bir noktadan oluşmaktadır.

(ii) durumunda ise yakınsaklık aralığı $(-\infty, +\infty)$ dur. (iii) durumunda kuvvet serisi $|x-a| < R$ için mutlak yakınsaktır. Ancak aralığın bitim noktalarında $(x = a \pm R)$ serinin yakınsaklığı için herhangi bir şey söylenemez. Yani, seriye bağlı olarak aralığın uç noktalarında kuvvet serisi yakınsak ya da ıraksak olabilir. Bu nedenle, (iii) durumunda yakınsaklık aralığı

$$(a-R, a+R), \quad [a-R, a+R], \quad (a-R, a+R], \quad [a-R, a+R)$$

açık aralık, kapalı aralık veya yarı açık aralık olabilir.

Not 6.1.11.

Bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını belirlemek için genel olarak D'Alembert oran testi kullanılır. Ancak, kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı sonlu ise aralığın bitim noktalarında D'Alembert oran testi kullanılamayacağından aralığın bitim noktalarında kuvvet serisinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı için başka bir test kullanılmalıdır.

Örnek 6.1.12.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} (x-2)^k$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Not 6.1.13.

Fonksiyonların kuvvet serisi olarak nasıl temsil edileceği üzerinde durulacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad ; \qquad |x|<1 \qquad (6.2)$$

denklem dikkate alınacaktır. (6.2) ifadesindeki kuvvet serisinin n -inci kısmi toplamı

$$P_n\left(x\right)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$$

biçiminde bir polinomdur.

Bir serinin toplamı kısmi toplamlar dizisinin limiti olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $-1 < x < 1$ için n sayısı arttıkça $P_n(x)$ polinomu daha iyi bir yaklaşım haline gelir. Sıfıra yakın x değerlerinde iyi bir yaklaşım elde etmek için sadece birkaç terimin alınması yeterlidir. Serinin yakınsaklık aralığının bitim noktalarına yaklaştıkça $(x = \pm 1)$ daha fazla terim alınması gereklidir.

Örnek 6.1.14.

$$\frac{1}{1+x^2}$$

fonksiyonunu bir kuvvet serisinin toplamı olarak ifade ediniz ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Teorem 6.1.15. (Terim Terime Türev)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot (x-a)^{k-1} \tag{6.3}$$

gerçeklenir. (6.3) ifadesindeki serinin de yakınsaklık yarıçapı R dir.

Not 6.1.16.

Yukarıdaki teorem, bir kuvvet serisinin terim terime türev alındığında yakınsaklık yarıçapının aynı kaldığını söylemektedir. Ancak, bu yakınsaklık aralığının aynı kaldığı anlamına gelmemektedir.

Örnek 6.1.17.

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

fonksiyonunu bir kuvvet serisinin toplamı olarak ifade ediniz ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Teorem 6.1.18. (Terim Terime İntegral)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + C \tag{6.4}$$

gerçeklenir. (6.4) ifadesindeki serinin de yakınsaklık yarıçapı R dir.

Örnek 6.1.19.

$$\frac{1}{1+x^2}$$

fonksiyonunu bir kuvvet serisinin toplamı olarak ifade ediniz.

Teorem 6.2.1.

Eğer f fonksiyonu a noktasında bir kuvvet serisi ile temsil ediliyor yani

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \quad , \qquad |x-a| < R$$

ise bu durumda c_k katsayıları

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

dir.

Not 6.2.2.

c_k katsayıları yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa f fonksiyonunun a noktasında bir kuvvet seri gösterimi varsa aşağıdaki biçimde

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

olması gerekir.

Tanım 6.2.3.

$R > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

serisine f fonksiyonunun a noktasındaki Taylor serisi adı verilir. Özel olarak, f fonksiyonunun $a = 0$ noktasındaki Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

olup bu seriye f fonksiyonunun Maclaurin serisi adı verilir.

Örnek 6.2.4.

$$f(x) = e^x$$

fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

Not 6.2.5.

Bir Taylor serisinin n -inci kısmi toplamı

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

olacak şekilde bir polinomdur. Bu polinoma f fonksiyonunun a noktasındaki n -inci mertebeden Taylor polinomu adı verilir.

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

ifadesine Taylor serisinin kalan terimi denir.

Teorem 6.2.6.

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

ve $|x-a| < R$ için

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

ise bu durumda f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında kendi Taylor serisi toplamına eşittir.

Not 6.2.7.

Belirli bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

olduğunu gösterirken genel olarak aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 6.2.8.

$d > 0$ olmak üzere $|x - a| \leq d$ için

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M$$

ise bu durumda

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} \quad , \qquad |x - a| \leq d$$

sağlanır.

Örnek 6.2.9.

$$f(x) = e^x$$

fonksiyonunun Maclaurin serisinin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 6.2.10.

$$f(x) = e^x$$

fonksiyonunun $a = 2$ noktasındaki Taylor serisini bulunuz.

Örnek 6.2.11.

$$f(x) = \sin x$$

fonksiyonunun Maclaurin serisinin

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 6.2.12.

$$f(x) = \cos x$$

fonksiyonunun Maclaurin serisinin

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 6.2.13.

$$f(x) = x\cos x$$

fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.