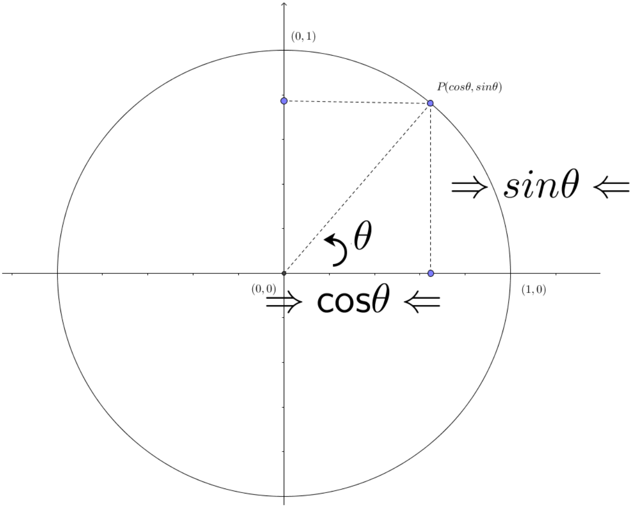
GENEL MATEMATİK

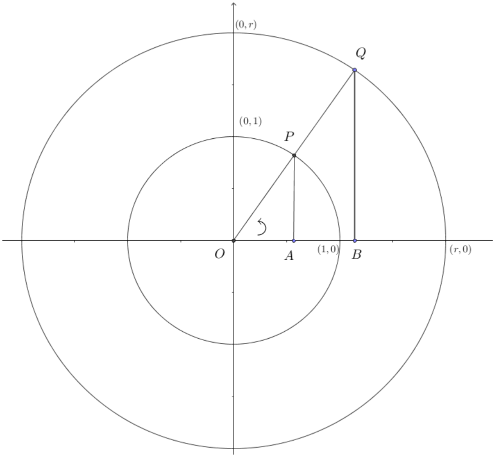
FONKSİYONLAR

Ankara Üniversitesi

Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çemberi dikkate alalım. Çember üzerinde alınan P noktasının apsisi $\cos\theta$, ordinatı $\sin\theta$ olarak tanımlanır. Böylece herbir θ sayısına bir $\cos\theta$ ve bir $\sin\theta$ sayısı karşılık gelir.


(0, 1)
P(cosθ, sinθ)
⇒ sinθ ⇐
θ
(0, 0)
⇒ cosθ ⇐
(1, 0)

Daha sonra $O\,(0,0)$ merkezli birim çember ile birlikte r yarıçaplı bir başka çember daha çizelim.



Bu durumda θ açısının çemberleri kestiği noktalar P ve Q olmak üzere

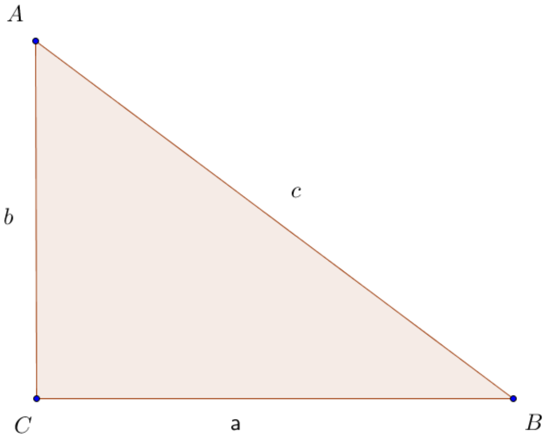
$$\sin\theta = |AP| \qquad \text{ve} \qquad \cos\theta = |OA|$$

olur. $\overset{\triangle}{POA}$ ve $\overset{\triangle}{QOB}$ üçgenlerinin benzerliğinden dolayı

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \Longrightarrow \frac{\sin\theta}{|BQ|} = \frac{1}{r} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{|BQ|}{r}$$

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \Longrightarrow \frac{\cos\theta}{|OB|} = \frac{1}{r} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{|OB|}{r}$$

elde edilir. Dolayısıyla bir dik üçgende


A
b
c
C
a
B

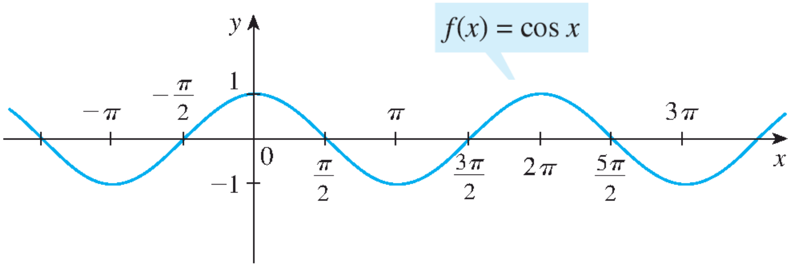
$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$

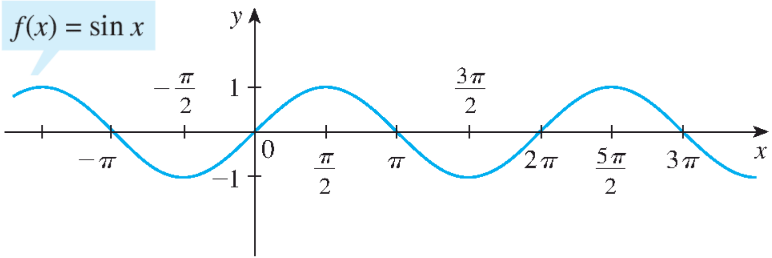
$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{a} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{b}$$

olur.

Kosinüs ve sinüs fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış değerlerini $[-1, 1]$ aralığında almaktadır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:


$f(x) = \cos x$
y
1
-1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π
x


$f(x) = \sin x$
y
1
-1
0
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π

Teorem 1.3.1.

$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarına ilişkin bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir:
(i) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ .$$

(ii) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sin x &= 0 \Longrightarrow x = k\pi \\
\sin x &= 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
\sin x &= -1 \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cos x &= 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
\cos x &= 1 \Longrightarrow x = 2k\pi \\
\cos x &= -1 \Longrightarrow x = \pi + 2k\pi
\end{aligned}$$

dir.

(iii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \sin(x \mp y) &= \sin x \cos y \mp \cos x \sin y \\ \cos(x \mp y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y \end{aligned}$$

sağlanır.
(iv) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

ve

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

gerçeklenir.

(v) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\\ \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

sağlanır.

(vi) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad , \quad \cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad , \quad \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

dir.

(vii) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \text{ aralığında kesin artandır} \\ \\ \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \text{ aralığında kesin azalandır} \end{array}$$

ve

$$f(x) = \cos x \Longrightarrow \begin{array}{l} [2k\pi, \pi + 2k\pi] \text{ aralığında kesin azalandır} \\ \\ [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \text{ aralığında kesin artandır} \end{array}$$