GENEL MATEMATİK

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Ankara Üniversitesi

Not 2.1.18.

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı ise x değişkeninin b noktasına yaklaşması sadece soldan mümkün olacağından

$$\lim_{x\to b^-} f(x)$$

ifadesi mevcut olması durumunda

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

dir. Benzer olarak

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

ifadesi mevcut olması durumunda

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

dir.

Tanım 2.1.19.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir M sayısı var öyle ki

$$x > M$$

olacak şekildeki her x sayısı için

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sağlanıyorsa bu durumda x değişkeni $+\infty$ ifadesine yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1.20.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+4}{x} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Tanım 2.1.21.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir N sayısı var öyle ki

$$x < N$$

olacak şekildeki her x sayısı için

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sağlanıyorsa bu durumda x değişkeni $-\infty$ ifadesine yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1.22.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.23.

$a \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.24.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{[\![x]\!]}$$

$$(b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+5}{2x^2+x-1}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{4x^2+8x+1}$$

$$(d)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^2+3}$$

Not 2.1.25.

Yukardaki örneklerden görüldüğü gibi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+...+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & ;\quad n<m\\ \frac{a_n}{b_m} & ;\quad n=m\\ \left(sgn\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot(+\infty) & ;\quad n>m\end{cases}$$

olur.

Örnek 2.1.26.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

ifadelerini hesaplayınız.

Tanım 2.1.27.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve a noktasıda A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $B > 0$ sayısı için eğer

$$0 < |x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her x sayısı için

$$f(x) > B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti $+\infty$ ifadesidir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.28.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve a noktasıda A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $K > 0$ sayısı için eğer

$$0 < |x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her x sayısı için

$$f(x) < K$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti $-\infty$ ifadesidir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

biçiminde gösterilir.

Not 2.1.29.

Sağ ve sol taraflı limitler de benzer şekilde tanımlanır. Yukardaki tanımlarda

$$0 < |x - a| < \delta$$

yerine

$$a - \delta < x < a$$

alınırsa sol taraflı limitin tanımı,

$$a < x < a + \delta$$

alınırsa sağ taraflı limitin tanımı elde edilir.

Örnek 2.1.30.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{4}{x-1}$$

ve

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{4}{x-1}$$

ifadelerini hesaplayınız.

Teorem 2.1.31. (Sandviç Teoremi)

a noktasının delinmiş komşuluğundaki her x sayısı için

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ve

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

ise bu durumda

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

olur.

Örnek 2.1.32.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 2.1.33.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.34.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to \infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$$