BÖLÜM 5

Rasgele Değişken: Bir örnek uzaydaki her rasgele olaya sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur. Başka bir ifadeyle rastgele değişken fonksiyonu, örnek uzayı ile reel sayılar kümesi arasında bir bağıntı kurar. Rastgele değişken $X, Y, Z \ldots$ ile, aldığı değerler ise $x, y, z \ldots$ gibi simgelerle gösterilir. Rasgele değişkenler kesikli rasgele değişken ve sürekli rasgele değişken olmak üzere ikiye ayrılır.

Tanım: X rastgele değişkeninin aldığı değerlerin kümesi sonlu yada sayılabilir sonsuzlukta ise X 'e "kesikli rastgele değişken" denir.
Örneğin: kız çocuk sayısı, öğrenci sayısı, sınıf sayısı
Tanım: Eğer X rastgele değişkenin tanım bölgesi bir aralık ya da aralıklar kümesi ise X 'e "sürekli rastgele değişken" denir.
Örneğin: araba hızı, yağış miktarı, kan basıncı

<u>Olasılık Dağılımları</u>

X kesikli rastgele değişkeni $x_1, x_2, ..., x_n$ gibi değerler alsın.

$f_X(x_i) = P(X = x_i), x \in D_X$, $i = 1, 2, ..., n$ (D_X , X r.d. aldığı değerlerin kümesi)

olsun. Eğer $f_X(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir.

1. $f_X(x_i) \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$

2. $\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1$

$\Rightarrow F_X : R \to [0,1]$

$x \to F_x(x) = P(X \leq x)$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir ve kesikli rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu bir 'basamak fonksiyonudur.'

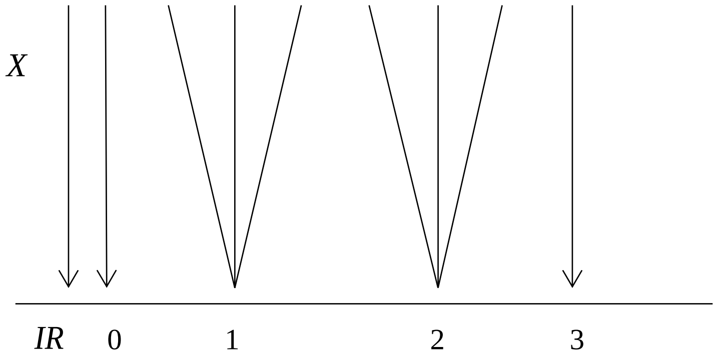
1) Dağılım fonksiyonu azalmayan fonksiyondur.
   $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2) Sağdan süreklidir.
   $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x), \; x \in R$
3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a) \qquad .$$

$$P(x = a) = F(a) - F(a^-)$$

Örnek: Düzgün bir paranın 3 kez atıldığı bir deneyde X rastgele değişkeni gelen turaların sayısı olsun.

$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}$



X rasgele değişkeninin aldığı değerler kümesi $D_X = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X = 0) = P\{YYY\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P\{YYT, YTY, TYY\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P\{YTT, TYT, TTY\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P\{TTT\} = \frac{1}{8}$$

olur.

$X = x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ise

$$P(X \le 0) = P(x = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X \le 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{4}{8}$$

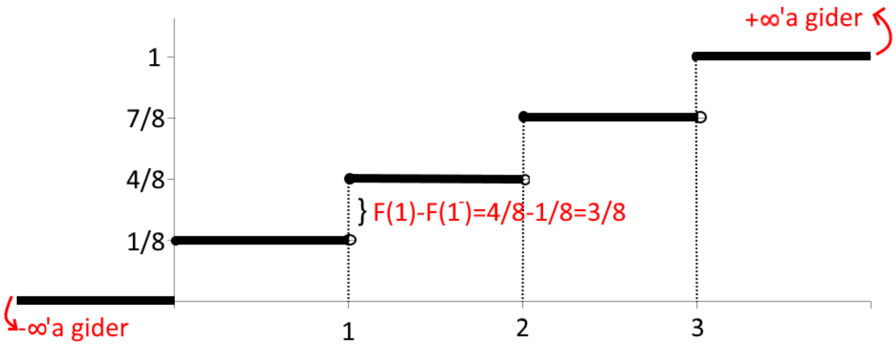
$$P(X \le 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{7}{8}$$

$$P(X \le 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 1$$

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 1/8 & ,0\le x<1\\ 4/8 & ,1\le x<2\\ 7/8 & ,2\le x<3\\ 1 & ,x\ge 3\end{cases}$$

şeklindedir.



$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=1/8+3/8+3/8+1/8=1$$
$$P(1<X<3)=P(1<X\le 3)-P(X=3)$$
$$=F(3)-F(1)-[(F(3)-F(3^-))]$$
$$=F(3^-)-F(1)=7/8-4/8=3/8$$

ya da

$$P(1<X<3)=P(X=2)=\frac{3}{8}$$

Sürekli Rastgele Değişken

X sürekli rastgele değişkeni $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlansın. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

1) $f(x)\ge 0 \quad , \quad -\infty<x<\infty$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

olmalıdır.

X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu.

$F_X : R\to[0,1]$

$$x\to F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

olarak tanımlanır. X sürekli rastgele değişkenin dağılımına "sürekli dağılım" denir.

Eğer X sürekli rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu verilirse, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{dF_X(x)}{dx}, & F_X \text{ 'in türevlenebildiği yerlerde}\\ 0\ , & \text{diğer yerlerde (d.y.)}\end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$$P(a<X\le b)=P(a<X<b)=P(a\le X\le b)=P(a\le X<b)=\int_a^b fx(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$P(X=a)=F(a)-F(a^-)=0$$

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2\ , & 0<x<2\\ 0\ , & d.y.\end{cases}$$

dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x \frac{3}{8}x^2dx$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{8}[x^3-0]=\frac{1}{8}x^3$$

Dağılım Fonksiyonu:

$$F_X(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 0\\ \dfrac{1}{8}x^3\ , & 0<x<2\\ 1\ , & x\ge 2\end{cases}$$

$P(1<X\le 2)$ olasılığı nedir?

$$P(1<X\le 2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{3}{8}x^2dx$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{8}[2^3-1^3]=\frac{7}{8}$$

$$P(1<X\le 2)=P(1\le X\le 2)=P(1<X<2)=P(1\le X<2)=\int_1^2 f_X(x)$$

$$P(1<X\le 3)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\frac{3}{8}x^2dx$$

$$P(X\ge 1)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{3}{8}x^2dx$$

İlk sorudaki fonksiyondan yararlanarak,

$$P(1<X\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{8}.2^3-\frac{1}{8}1^3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$P(X \geq 1.5) = 1 - P(X < 1.5) = 1 - \frac{1}{8}(1.5)^3 = 1 - \frac{3.375}{8} = 1 - 0.421875 = 0.578125$$

Örnek:

X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^3 \ , \ 0 < x < 2 \\ 1 \ , x \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde olsun. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde hesaplanır.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{dF_X(x)}{dx}, \ F_X \text{'in türevlenebildiği yerlerde} \\ 0 \ , \ \text{diğer yerlerde (d.y.)} \end{cases}$$

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^3 \ , \ 0 < x < 2 \\ 1 \ , x \geq 2 \end{cases}$$

şeklindedir. $F_X(x)$ dağılım fonksiyonunun x'e göre türevi alınırsa

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 \ , \ 0 < x < 2 \\ 0 \ , \ d.y. \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html