

## BÖLÜM 10

### TAHMİN

**Örneklem:** Birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip  $n$  tane  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rastgele değişkenlerine bu dağılımdan alınan "örneklem" denir.  $n$  sayısına "örneklem hacmi" denir. Ölçme sonucunda bu rastgele değişkenlerin aldığı değerlere 'gözlem değerleri' ya da 'veri' denir.

**İstatistik:** Örneklemen bilinmeyen parametre içermeyen fonksiyonuna denir. Her istatistik bir rastgele değişkendir.

**Tahmin Ediciler:** Bir istatistik bilinmeyen bir parametrenin belirlenmesi amacıyla kullanıldığında bu istatistiğe "tahmin edici" denir.

**Tahmin:** Bilinmeyen bir parametre için önerilen tahmin edicinin aldığı değere "tahmin" denir.  $\hat{\theta}$  ile gösterilir.

**Nokta Tahmini:** Parametreye uygun istatistiğin tek sayısal değeridir. Örneğin; kitle ortalamasını tahmin etmek için örneklem ortalaması alınırsa, parametrenin nokta tahmin edicisi kullanılır demektir.

**Aralık Tahmini:** Bilinmeyen kitle parametresinin belli bir olasılıkla içinde bulunacağı rastgele iki sınırı belirlemektedir. Buna "güven aralığı" denir.

**Merkezi Limit Teoremi:** Ortalaması  $\mu$ , varyansı  $\sigma^2$  olan, herhangi bir kitleden yerine koyarak  $n$  birimlik örneklemin ortalamasına ait örneklem dağılımı ortalaması ( $\mu$ ), varyansı ( $\sigma^2 / n$ ) olan normal dağılıma yaklaşır.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ise  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$  dir ve

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

şeklinde standart normal dağılıma dönüşür.

**Güven Aralığı:** Bilinmeyen  $\theta$  kitle parametresini içine alan bir aralık, belirli bir olasılıkla tahmin edilebilir. Bu tahmine aralık tahmini, tahmin edilen aralığa da "güven aralığı" denir.

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha, \quad \hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 \quad (\text{iki yönlü güven aralığı})$$

Şeklinde gösterilir.

*Tek taraflı güven aralığı*

$$P(\theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha \quad \text{ya da} \quad P(\theta > \hat{\theta}_1) = 1 - \alpha$$

şeklindedir.

## Hipotez Testleri ve Güven Aralıkları

Geçerliliği olasılık esaslarına göre araştırılabilen ve bir karar verebilmek için öne sürülen varsayımlara ‘‘hipotez’’ denir. Hipotez, kitle dağılımı ile ilgili öne sürülen bir önermedir. Örneklem dağılımlarından elde edilen istatistiklere bağlı olarak örneklem dağılımının parametresi bilinen kitleye ait olup olmadığı araştırılır.

Hipotezlerin örneklem yardımıyla incelenmesine ‘‘hipotez testi’’ denir. Test etmek istenilen hipotez  $H_0$  ile karşıt hipotez ise  $H_1$  ile gösterilir. Bir hipotez testi yapıp  $H_0$  hipotezinin kabulüne ya da reddine karar verildiğinde aşağıdaki dört durumdan birisi söz konusu olacaktır.

$H_0$  : Yokluk hipotezi

$H_1$  : Alternatif hipotez

### Hipotez Testinde Kararlar:

	$H_0$ doğru	$H_0$ yanlış
$H_0$ red edilemez	Uygun karar	II. tip hata
$H_0$ red	I. tip hata	Uygun karar

**I. Tip Hata:**  $H_0$  hipotezi gerçekte doğruyken  $H_0$  hipotezi red edilirse I. Tip hata oluşur. Bu hatanın oluşması olasılığı  $\alpha$  'dır. Yani,

$$P(\text{I. tip hata}) = P(H_0 \text{ red} / H_0 \text{ doğru}) = \alpha$$

Testin anlamlılık düzeyi olarak anlamlandırılır. Çoğunlukla  $\alpha = 0.05, 0.01, \dots$  gibi seçilir.

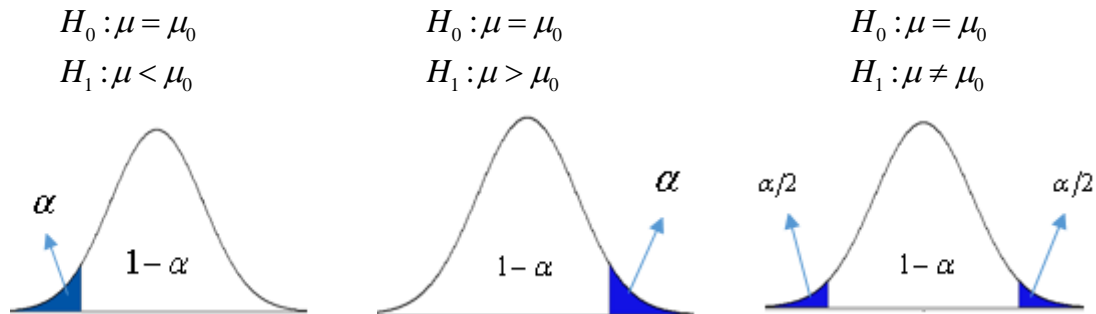
**II. Tip Hata:**  $H_0$  hipotezi gerçekte yanlış iken  $H_0$  hipotezi red edilmezse II. tip hata oluşur. Bu hatanın oluşması olasılığı  $\beta$  'dır.

$$P(\text{II. tip hata}) = P(H_0 \text{ red edilemez} / H_0 \text{ yanlış}) = \beta$$

**Testin Gücü:**  $H_0$  hipotezi gerçekte yanlış iken  $H_0$  hipotezi red etme olasılığına testin gücü denir.

Yani, testin gücü  $P(H_0 \text{ red} / H_0 \text{ yanlış}) = 1 - \beta$  'dir.

\*Hipotezin red edildiği bölgeye ‘‘red bölgesi’’ ya da ‘‘ kritik bölge’’ denir. (Taraflı bölgeler kurulan hipoteze göre red bölgelerini göstermektedir.)



## Kitle Ortalaması için Hipotez Testi ve Güven Aralığı

### 1) Kitle varyansı $\sigma^2$ biliniyor

Kitle varyansı  $\sigma^2$  bilindiğinde kitle ortalaması için hipotez testi.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

1) Hipotez kurulur.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

2) Test istatistiği hesaplanır.

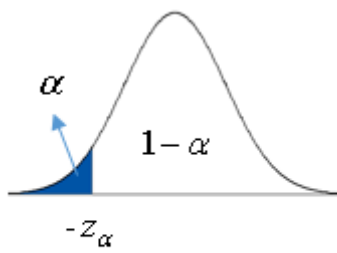
$$Z_t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

3) Karar verilir.

$\alpha$  anlam düzeyine göre kritik bölge belirlenerek hipotezin red edilip edilmeyeceğine karar verilir.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

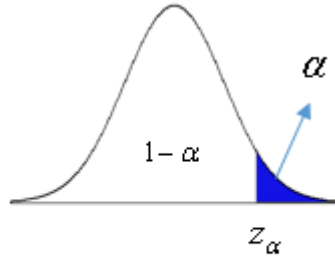
$$H_1 : \mu < \mu_0$$



$Z_t < -Z_\alpha$  olduğunda  $H_0$   
hipotezi red edilir

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

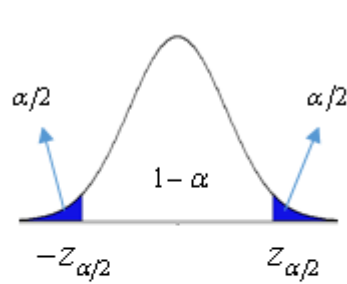
$$H_1 : \mu > \mu_0$$



$Z_t > Z_\alpha$  olduğunda  $H_0$   
hipotezi red edilir

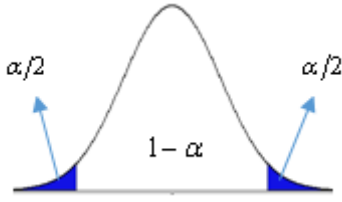
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$



$Z_t < -Z_{\alpha/2}$  olduğunda  
ya da  
 $Z_t > Z_{\alpha/2}$  olduğunda  
 $H_0$  hipotezi red edilir

## Güven Aralığı



$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$\bar{x} \mp z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**p değeri:**  $H_0$  hipotezi doğru olduğunda, test istatistiğinin hesaplanan değerine eşit ya da daha uç değerler alması olasılığıdır. Bu olasılığa ‘p değeri’ denir.

$p < \alpha$  ise  $H_0$  hipotezi red edilir.

$$p = \begin{cases} 2[1 - P(Z \leq Z_t)], & H_1 : \mu \neq \mu_0 \\ 1 - P(Z \leq Z_t) & , H_1 : \mu > \mu_0 \\ P(Z \leq Z_t) & , H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

**Örnek:**  $100 \text{ cm}^3$  idrardaki keratin miktarı ölçülmüş ve ortalaması  $\mu = 1.58 \text{ mg}$ , varyansı  $\sigma^2 = 0.05 \text{ mg}$  olduğu saptanmıştır. Fakat bir araştırmacı ortalama keratin miktarının daha fazla olduğunu iddia etmektedir. Bu amaçla rastgele 84 kişi seçilmiştir. Veriler aşağıdaki gibidir;

1.22	1.22	1.23	1.25	1.26	1.28	1.31	1.33	1.33	1.36
1.37	1.38	1.40	1.40	1.40	1.43	1.43	1.43	1.44	1.46
1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.49	1.49	1.50	1.51
1.51	1.52	1.52	1.52	1.53	1.54	1.54	1.55	1.56	1.56
1.57	1.57	1.58	1.58	1.58	1.59	1.59	1.60	1.60	1.61
1.62	1.65	1.65	1.66	1.66	1.66	1.66	1.67	1.68	1.68
1.69	1.69	1.71	1.72	1.73	1.73	1.75	1.76	1.80	1.81
1.83	1.83	1.83	1.86	1.86	1.86	1.89	1.90	1.96	2.00
2.02	2.18	2.29	2.34						

Araştırmacının iddiasının geçerli olup olmadığını %95 güven düzeyinde test ediniz. Kitle ortalaması için %95 güven düzeyinde güven aralığını oluşturunuz.

**Çözüm:**

$$1 - \alpha = 95 \text{ (güven düzeyi)}$$

$$\alpha = 0.05 \text{ (anlam düzeyi)}$$

$$\sigma^2 = 0.05 \text{ mg 'dir.}$$

$$n = 84 \text{ veriden } \bar{x} = 1.603 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Kitle varyansı  $\sigma^2$  biliniyor.

**1) Hipotez kurulur**

$$H_0 : \mu = 1.58$$

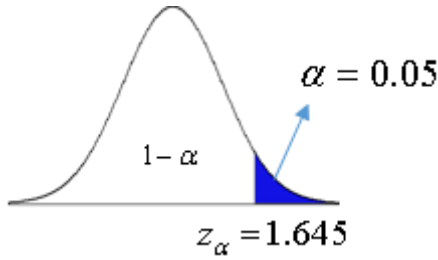
$$H_1 : \mu > 1.58$$

**2) Test istatistiği:**

$$z_t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{1.603 - 1.58}{0.224 / \sqrt{84}} = 0.94$$

olarak hesaplanır.

**3) Karar aşaması:**



( $z_\alpha$  :  $\alpha$  'ya bağlı olarak standart normal dağılım tablosundan bulunur.)

$z_t = 0.94 < z_\alpha = 1.645$  olduğunda  $H_0$  hipotezi red edilemez.

**Yorum :**  $100 \text{ cm}^3$  idrardaki keratin miktarının ortalamasının  $1.58 \text{ mg}$  olduğu %95 güven düzeyinde söylenebilir.

- $p$  değeri hesaplanarak hipotez testi yapılabilir.

$$p = P(Z \geq z_t)$$

$$= P(Z \geq 0.94)$$

$$= 1 - P(Z < 0.94)$$

$$= 0.1736$$

$p = 0.1736 > \alpha = 0.05$  olduğunda  $H_0$  hipotezi red edilemez.

- Güven aralığı;

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96 \rightarrow$  standart normal dağılım tablo değeri

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\hat{\theta}_1 = \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.603 - 1.96 \times \frac{0.224}{\sqrt{5}} = 1.555$$

$$\hat{\theta}_2 = \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.603 + 1.96 \times \frac{0.224}{\sqrt{5}} = 1.651$$

%95 güven düzeyinde kitle ortalamasını içeren aralık (1.555; 1.651) 'dir.

## KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

<http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html>