BÖLÜM 4

OLASILIK

Rasgele Sonuçlu Deney: Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden söylenemeyen bir işleme Rasgele Sonuçlu Deney veya kısaca Deney denir.

Örnek Uzay: Bir deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine örnek uzay denir. "S"ile gösterilir

Olay: Örnek uzayın bir alt kümelerine olay denir.

Örnek: Bir tavla zarnın birkez atılması ve üste gelen yüzün gözlenmesi deneyi için; 2^n olarak tanımlanır.

Olasılık: S bir örnek uzay olmak üzere S örnek uzayındaki her A olayı için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $P(A)$ sayısı atanabiliyorsa $P(A)$'ya A olayının olasılığı denir.

- $P(A) \geq 0$
- $P(S)=1$
- $A_{1,}A_2...A_n$ olayları ayrık olaylar dizisi ise;

Ayrık olay: $A_i \cap A_j \neq 0,\ i \neq j$

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup ...A_n)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (sayılabilir sonsuz)}$$

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup ...A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \text{ (örnek uzay sonlu elemanlı)}$$

*Bir A olayının meydana gelme olasılığı:
$0 \leq P(A) \leq 1$
Eğer imkansız bir olay ise; $P(A)=0$
Eğer kesin bir olay ise; $P(A)=1$

Olasılığın Sıklık Tanımı: Bir deneme n kez yapıldığında bir A olayı f kez gerçekleşirse A'nın sıklığı ya da frekansı f/n'dir.

Teorem: Bir deneyde N tane sonuç varsa ve her birinin olasılığı birbirine eşit ise, ilgilenilen sonuç sayısı n ise bu olayın olasılığı;

$$P(A)=\frac{n}{N}$$

Olasılık Aksiyomları:

1. $P(\emptyset)=0$
2. A olayı S örnek uzayının bir alt kümesidir.

Bir A olayının tümleyeni $P(\bar{A})=1-P(A)$,

$\mathrm{S}=A \cup \bar{A}$,

$P(S)=P(A \cup \bar{A})$ ($A \cap \bar{A}=\emptyset$ ayrık olaylar)

$1=P(A)+P(\bar{A})$

$P(\bar{A})=1-P(A)$

3. $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$,

$B = A \cup (B/A)$ $\quad$ ($A \cap (B/A)$ ayrık olaylar)

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B/A)}_{\geq 0}$$

4. A ve B herhangi 2 olay olsun. $P(A/B) = P(A) - P(A \cap B)$ 'dir.

$A = (A \cap B) \cup (A/B)$ $\quad$ ($(A \cap B) \cap (A/B) = \varnothing$ ayrık olaylar)

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A/B)$$

$$P(A/B) = P(A) - P(A \cap B)$$

5. A ve B iki olay olsun.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B = A \cup (B/A)$ $\quad$ ($A \cap (B/A)$ ayrık olaylar)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B/A) \qquad \left[P(B/A) = P(B) - P(A \cap B)\right]$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

n sayıdaki olay için;

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

6. A ve B olayları aynı anda gözlenmesi olanaksız ise bu olaylara ayrık olaylar denir. A ve B ayrık olaylarsa bu iki olayın ortak noktası olmadığından $A \cap B = \varnothing$ ve $P(A \cap B) = 0$.

7. $S = \{A_1, A_2 \ldots . A_n\}$ her A_i olayına $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, karşılık gelen olasılık uzayında bir p_i değeri olsun.

Bu durumda $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Örnek:

$P(A) = 0,4$ $\quad$ $P(B) = 0,7$ $\quad$ $P(\bar{A} \cap B) = 0,3$ olmak üzere

a. $P(\bar{A}) = ?$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,4$$

$$P(\bar{A}) = 0,6$$

b. $P(A \cap B) = ?$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0,7 - 0,3 = 0,4$$

c. $P(A \cup B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0,4 + 0,7 - 0,4 = 0,7$$

d. $P(A \cup \bar{B}) = ?$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0,4 - 0,4 = 0$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) - P(\bar{B}) - P(A \cap B)^{-}$$
$$= 0,4 + 0,3 = 0,7$$

e. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = ?$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - 0,4 = 0,6$$

f. $P(\bar{A} \cup B) = ?$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$
$$= 0,6 + 0,7 - 0,3 = 1$$

<u>Koşullu Olasılık</u>

Bir olayın gerçekleşmesi için başka bir olayın gerçekleşmesi koşuluna bağlı olan olasılıktır.
B olayı bilindiğinde A olayının gerçekleşme olasılığı;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Eğer A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı değilse A ve B olayları bağımsız olaydır ve

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

dir. Bu durumda,

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Şeklindedir.

Örnek: Yapılan bir çalışmada hastaların $\%20$'si hem asprin hem de noveljin, $\%40$'ı sadece asprin ve $\%30$'u sadece novaljin kulanmaktadır. Rastgele seçilen bir hastanın asprin kullandığı biliniyorsa novaljin de kullanma olasılığı nedir?

$$P(A) = 0,60$$

$$P(A \cap B) = 0,20$$

$$P(B) = 0,50$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,20}{0,60} = \frac{1}{3}$$

Örnek: Bir alışveriş merkezinde bir ay boyunca buraya gelen 1400 kişi rastgele olarak seçiliyor ve aşağıdaki tablo elde edilmiştir.

e-posta adresi / Cinsiyet	**Var**	**Yok**	**Toplam**
Kadın	550	250	800
Erkek	400	200	600
Toplam	950	450	1400

a) E-Posta adresi var olduğu bilindiğine göre kadın olması olasılığı nedir?

$$P(K|V) = \frac{P(K \cap V)}{P(V)} = \frac{550/1400}{950/1400} = \frac{11}{19}$$

b) Seçilen kişinin erkek olduğu bilindiğine göre e-posta adresinin olmaması olasılığı nedir?

$$P(Y|E) = \frac{P(Y \cap E)}{P(E)} = \frac{200/1400}{600/1400} = \frac{1}{3}$$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

   Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

   Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

   Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

   Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html