BÖLÜM 8

BAZI KESİKLİ DAĞILIMLAR

1) **Bernoulli Dağılımı:**

Bir rastgele deney yapıldığında bu deneyin sadece iki mümkün sonucu elde ediliyorsa böyle bir deneye Bernoulli deneyi denir. Bernoulli deneyinde elde edilecek sonuçlardan biri 'başarı' olarak nitelendiriliyorsa diğeri ise 'başarısızlık' olarak nitelendirilir. Başarı sonucu elde edildiğinde $x=1$, başarısızlık sonucu elde edildiğinde $x=0$ değerini alan X rastgele değişkenine 'Bernoulli değişkeni' denir. Bu değişkenin olasılık dağılımına Bernoulli dağılımı denir.

Deney sonucunda başarı elde etme olasılığı ' p ' ise X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu;

$$f_X(x)=P(X=x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x=0,1 \\ 0, & d.y.(diyer\ yerlerde) \end{cases}$$

şeklinde gösterilebilir. $0<p<1$, $q=1-p$.

Bernoulli dağılımının beklenen değeri ve varyansı

$$E(X)=p$$

$$Var(X)=pq$$

dir.

Örnek: Bir kişinin Pazar günü sinemaya gitme olasılığı 0.3'tür. Buna ilişkin olarak fonksiyonu tanımlayınız.

$$p=0.3,\ q=0.7$$

$$f(x)=\begin{cases} p^x q^{1-x}, & x=0,1 \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

$$P(X=x)=(0.3)^x.(0.7)^{1-x},\ x=0,1$$

$$P(X=0)=(0.3)^0.(0.7)^{1-0}=0.7$$

$$P(X=1)=(0.3)^1.(0.7)^{1-1}=0.3$$

$$E(X)=0.3$$

$$Var(X)=(0.3)(0.7)=0.21$$

2) **Binom Dağılımı:**

Kesikli rastgele değişkenin oluşturduğu bir dağılımdır. İki olası sonuç ile ilgilenilir. Erkek/kadın, sağlam/bozuk, olumlu/olumsuz, yazı/tura vs. Bu tür iki sonuçlu deneyler n kez tekrar edildiğinde, X rastgele değişkeni gelen başarıların sayısı olsun. X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu;

$$f_X(x)=P(X=x)=\begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, & x=0,1...,n \\ 0, & dy \end{cases}$$

$$0<p<1,\ q=1-p$$

$$E(X)=np$$

$$Var(X)=npq$$

Örnek: 5 seçenekli 20 soruluk bir test sınavında sorular rastgele işaretlendiğinde;

a) En az 10 doğru cevap tutma olasılığı nedir?

b) Tutturulan doğru cevap sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm:

X rasgele değişkeni 20 soruda doğruların sayısını göstersin.

$$X \sim Binom(n = 20,\ p = \frac{1}{5})$$

a) $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} P(X = x)$

$$= \sum_{x=10}^{20} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{5}\right)^{x} . \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20-x} = 0.0026$$

b) $E(X) = np = 20\frac{1}{5} = 4$

Örnek: 4 çocuklu bir ailede, kız çocuklarının sayısı X rastgele değişkeni ile gösterilsin.

$$X \sim Binom(n = 4,\ p = \frac{1}{2})$$

$$P(X = x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-x}, \quad x = 0,1,2,3,4$$

a) Tümünün erkek; birinin, ikisinin, üçünün, dördünün kız çocuğu olma olasılıklarını hesaplayınız.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{0} . \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{6}{16}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$$

Dört çocuklu 160 ailede kız çocukların dağılımı nasıl olur?

x	$160 \times P(X=x)$
0	$160\frac{1}{16}=10$
1	$160\frac{4}{16}=40$
2	$160\frac{6}{16}=60$
3	$160\frac{4}{16}=40$
4	$160\frac{1}{16}=10$

b) Kızların beklenen sayısı kaçtır?

$$E(X)=np=4\frac{1}{2}=2$$

c) En az ikisinin kız çocuğu olma olasılığı nedir?

$$P(X \geq 2)=\sum_{x=2}^{4} P(X=x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

d) En çok ikisinin kız çocuğu olma olasılığı nedir?

$$P(X \leq 2)=\sum_{x=0}^{2} P(X=x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}=\frac{11}{16}$$

3) **<u>Geometrik Dağılım:</u>**

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyinde, **ilk istenen sonucun** (başarı ya da başarısızlık) elde edilmesi için yapılan deney sayısı X rastgele değişkeni olmak üzere X 'e 'geometrik rastgele değişkeni' denir. Bu değişkenin dağılımına 'Geometrik Dağılım' denir.

$$P(X=x)=\begin{cases} pq^{x-1}, & x=1,2,3... \\ 0, & dy \end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

$$Var(X)=\frac{q}{p^2}$$

Örnek: Bir atıcının her atışta hedefi vurma olasılığı aynı ve $\frac{2}{3}$ olasılıkla gerçekleşiyor. Arka arkaya yapılan atışlar sonucunda hedefi ilk kez vurmak için gereken atış sayısı X rastgele değişkeni olduğuna göre;

$X \sim Geometrik(p = \frac{2}{3})$

a) X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, 3... \\ 0, & dy \end{cases}$$

b) Hedefi ilk kez 2. atışta vurma olasılığını hesaplayınız.

$$P(X = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

c) Hedefi ilk kez en çok 3. atışta vurma olasılığını hesaplayınız.

$$P(X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} P(X = x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = 0.96$$

d) Hedefi ilk kez en az 5. atışta vurma olasılığını hesaplayınız.

$$P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{\infty} P(X = x)$$

$$= 1 - P(X < 5)$$

$$= 1 - \sum_{x=1}^{4} P(X = x)$$

$$= 1 - \left[0.96 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}\right] = 0.016$$

e) Hedefi ilk kez vuruncaya kadar ortalama kaç atış gerekir?

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2} = 1.5$$

f) $Var(X)$ değerini hesaplayınız.

$$Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{3}{4}$$

4) **<u>Poisson Dağılımı:</u>**

Sürekli ortamlarda (zaman, alan, hacim vs.) kesikli sonuçlar veren ve bazı özelliklere sahip deneyleri modellemede kullanılır. Örneğin; belli bir zaman aralığında bir yoldan geçen arabaların gözlenmesi, belli bir zaman aralığında mağazaya gelen müşterilerin gözlenmesi vb.

Olasılık fonksiyonu

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & x=0,1,2...\\ 0, & dy\end{cases}$$

Burada λ belli bir zaman aralığında ya da belli bir yerde istenen olayın ortalama ortaya çıkma sayısıdır. Poisson dağılımının beklenen değeri ve varyansı

$$E(X)=\lambda$$

$$Var(X)=\lambda$$

şeklindedir.

Örnek: 5 dakikalık bir zaman aralığında belli bir telefon santraline ortalama 3 müracaat yapılıyor.

$$X \sim Poisson(\lambda=3)$$

a) Bu zaman aralığında hiç müracaat olmama olasılığı nedir?

$$P(X=0)=\frac{e^{-3}.3^{0}}{0!}=0.05$$

b) En çok 3 müracaat olma olasılığı nedir?

$$P(X\leq 3)=\sum_{x=0}^{3}P(X=x)$$

$$=\frac{e^{-3}.3^{0}}{0!}+\frac{e^{-3}.3^{1}}{1!}+\frac{e^{-3}.3^{2}}{2!}+\frac{e^{-3}.3^{3}}{3!}=0.65$$

c) En az 5 müracaat olma olasılığı nedir?

$$P(X\geq 5)=1-P(X<5)$$

$$=1-\left[0.65+\frac{e^{-3}.3^{4}}{4!}\right]$$

$$=1-[0.65+0.168]=0.182$$

d) Beklenen değer ve varyans nedir?

$$E(X)=3$$

$$Var(X)=3$$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

   Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

   Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

   Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

   Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html