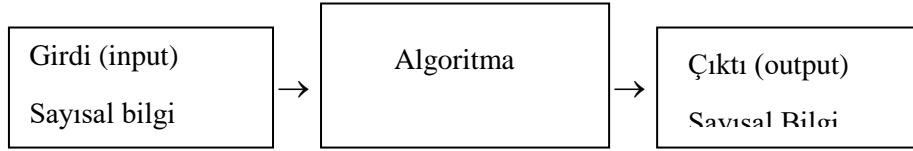


BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Sayısal çözümlene uygulama ve bilgisayar mühendisliğin ortak bir dalıdır. Sayısal çözümlenmenin amacı matematiksel modellerle ifade edilmiş çok çeşitli olanlara ait problemlerin çözümünde belli sayıda ve sırası belirlenmiş işlemleri bilgisayar yardımıyla yaparak belirli bir hassaslığa sahip sonuçlar elde edilmek için kullanabilecek yöntemlerin bulunması geliştirilmesi var olanların irdelenmesi ve en etkin olanların saptanması olduğu söylenebilir. Bir problemin çözümü için gerekli olan sonlu sayıda işlemlerin adım adım belirli bir sırayla tanımlanan düzene veya hesaplama yöntemine algoritma denmektedir. Buna göre sayısal çözümlene verilen sayısal bilgilerin belli bir algoritmayla işlenerek sonunda sayısal bilgiler elde etmek olarak özetlenebilir.



Algoritmanın hızı, algoritmanın seçimini etkileyen en önemli faktördür. Bir problemin çözümü için kullanılan giriş bilgileri çoğu kez bir deneyde ölçme sonucundan elde edildiklerinde veya bir tablo ya da hesaplanan fonksiyon değeri olduklarında bir hataya sabittir.

Hata Analizi:

a) Mutlak Hata: Asıl (kesin) değer a ile yaklaşık değer \tilde{a} (bilgisayar değeri, ölçüm değeri) arasındaki,

$$e = a - \tilde{a}$$

farka hata denir. Hata pozitif veya negatif olabilir. Hatanın mutlak değerine mutlak hata denir. Mutlak hata,

$$|e| = |a - \tilde{a}|$$

dır. Genellikle, $\varepsilon_{\tilde{a}}$ ile mutlak hata için bir üst sınır gösterilsin.

$$a = \tilde{a} \pm \varepsilon_{\tilde{a}}$$

ifadesi, $\tilde{a} - \varepsilon_{\tilde{a}} \leq a \leq \tilde{a} + \varepsilon_{\tilde{a}}$ anlamını taşıyacaktır.

b) Bağıl (Görel) Hata

$$r = \frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} = \frac{|e|}{|a|}$$

$$\tilde{r} = \frac{|e|}{|\tilde{a}|} \rightarrow \text{yaklaşık görel hata}$$

ÖRNEK:

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ serisinin ilk kez beş teriminin kullanılarak $\sin(0.5)$ değerini hesaplayınız. Mutlak ve görel hatayı bulunuz.

$$\tilde{a} = \sin(0.5)$$

$$= 0.5 - \frac{(0.5)^3}{3!} + \frac{(0.5)^5}{5} - \frac{(0.5)^7}{7} + \frac{(0.5)^9}{9}$$
$$= 0.5 - 0.020833 + 0.000260 - 0.000001 = 0.479426$$

$$a = \sin(0.5) = 0.008726$$

$$|e| = |a - \tilde{a}| = |0.008726 - 0.479425| = 0.470699$$

$$r = \frac{|e|}{|a|} = \frac{0.470699}{0.008726} = 53.942126$$

HATA ANALİZİ

a) Veri Hatası

İşlemlerde kullanılacak verilerde bulunan hataları vermektedir. Bu hatalar işlemlerde kullanılan sayılardan veya ölçme yolu ile elde edilen belirsizliklerden dolayı olabilir. Bu tür hatalar, rakamları hatalı kaybetme veya matematiksel sabitlerin (π sayısı gibi) tam olarak temsil edilememesi yüzünden bu tür hatalar ortaya çıkar. Ondalık sayılardan bazılarının tam olarak gösterilmesinin de bu hatalara sebebiyet verir.

Verilerde küçük bir hata çözümde görel küçük bir hata ile sonuçlanıyorsa bu problemi iyi koşullu problem çözümünde ki hata büyükse zayıf koşullu problem denir.

ÖRNEK:

$f(x) = x^2 + x - 1150$ fonksiyonun zayıf koşullu olup olmadığını araştırınız.

$$x = \frac{100}{3}, \tilde{x} = 33$$

$$|e_x| = |x - \tilde{x}| = \left| \frac{100}{3} - 33 \right| = \frac{1}{3} \rightarrow \text{görel hata}$$

$$f\left(\frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^2 + \frac{100}{3} - 1150 = \frac{-50}{9}$$

$$\tilde{f}(33) = (33)^2 + 33 - 1150 = -28$$

$$r_{\tilde{x}} = \frac{|x - \tilde{x}|}{|\tilde{x}|} = \frac{1}{33} = 0.0101$$

$$|e_{\tilde{f}}| = |f - \tilde{f}| = \left| \frac{-50}{9} + 28 \right| = \frac{202}{9} \rightarrow$$

$$r_{\tilde{f}} = \frac{|e_{\tilde{f}}|}{|\tilde{f}|} = \left| \frac{\frac{202}{9}}{28} \right| = 0.80$$

Girdide %1'lik hata çıktıda %80'lik hataya sebep oldu.

b) Kesme Hatası

Genelde sonsuz terimli bir serisi uygun şekilde keserek nümerik sonuçlar bulunur. Belli sayıda terimden sonra gelen terimlerin ihmal edilmesi bir hataya neden olur. Burada atılan terimlerin toplamı olarak tanımlanır.

Örnek:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + R_n(k)$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$$

c) Yuvarlama Hatası

Özellikle elektronik hesaplayıcılarda, bir sayının sonlu sayıdaki hane ile ifade edilememesine bağlı olarak yapılan hatalardır. Bu tür hatalar, genellikle ondalık yazılışın son hanesini etkilerler.

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
<http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html>
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
Doç. Dr. Ömer AKIN
A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
Mustafa BAYRAM (2002)