BÖLÜM 2

Aritmetik İşlemlerde Hata Analizi

$\hat{X},\hat{Y}$ iki yaklaşık sayının toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemlerinde ortaya çıkan hataların analizini yapacağız.

Toplamdaki Hata

$a = \tilde{a} + e_{\tilde{a}}$

$x = \tilde{x} + e_{\tilde{x}}$ değerinin $y = \tilde{y} + e_{\tilde{y}}$ değerinden büyük olması,

$x = \tilde{x} - e_{\tilde{x}}$ değerinin $y = \tilde{y} - e_{\tilde{y}}$ değerinden küçük olması,

İki gerçek değerin toplamı;

$\tilde{x} + e_{\tilde{x}} + \tilde{y} + e_{\tilde{y}} = \tilde{x} + \tilde{y} + \left(e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}\right)$ ifadesinden daha büyük olamaz.

$\tilde{x} - e_{\tilde{x}} + \tilde{y} - e_{\tilde{y}} = \tilde{x} + \tilde{y} - \left(e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}\right)$ ifadesinden daha küçük olamaz.

$x + y$ nin yaklaşık değerleri $\tilde{x} + \tilde{y}$, toplamdaki hata $e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}$ kadardır.(Toplamdaki mutlak hata)

$$\left|e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}\right| = \left|e_{\tilde{x}}\right| + \left|e_{\tilde{y}}\right|$$

$$r = \frac{\left|e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}\right|}{\left|\tilde{x} + \tilde{y}\right|} = \frac{|\tilde{x}|}{|\tilde{x} + \tilde{y}|} \cdot r_{\tilde{x}} + \frac{|\tilde{y}|}{|\tilde{x} + \tilde{y}|} \cdot r_{\tilde{y}} + \frac{1}{2} \cdot b^{-n+1}$$

$$r_{\tilde{x}} = \frac{\left|e_{\tilde{x}}\right|}{|\tilde{x}|}, r_{\tilde{y}} = \frac{\left|e_{\tilde{y}}\right|}{|\tilde{y}|}$$

ÖRNEK:

5 ondalıklı bir hesaplayıcıda 325.6 ve 1.17153 sayılarını toplayınız ve göreli hatayı hesaplayınız.

$$x = 325.6 \rightarrow 0.32560 \cdot 10^3 = \tilde{x}$$
$$y = 1.17153 \rightarrow 000117 \cdot 10^3 = \tilde{y}$$
$$\tilde{x} + \tilde{y} = 0.32677 \cdot 10^3 \rightarrow yaklaşıkdeğer$$
$$x + y = 325.6 + 1.17153 = 326.77153 \rightarrow gerçekdeğer$$
$$r_{x+y} = \frac{\left|326.77153 - 0.32677 \cdot 10^3\right|}{|326.77153|} = 0.000004682 \rightarrow 5 ondalıklı$$

Çıkarmada Hata

$$\tilde{x}-e_{\tilde{x}} \leq x \leq \tilde{x}+e_{\tilde{x}}$$
$$\tilde{y}-e_{\tilde{y}} \leq y \leq \tilde{y}+e_{\tilde{y}}$$

$x > y$ olsun.

$x - y$ gerçek değeri;

$\tilde{x}+e_{\tilde{x}}-\left(\tilde{y}+e_{\tilde{y}}\right)$ değerinden büyük olamaz.

$$\tilde{x}-\tilde{y}-\left(e_{\tilde{x}}+e_{\tilde{y}}\right)$$

$$\left|e_{\tilde{x}}-e_{\tilde{y}}\right| = \left|e_{\tilde{x}}\right|+\left|e_{\tilde{y}}\right|$$
$$r_{\tilde{x}-\tilde{y}} = \frac{\left|e_{\tilde{x}}-e_{\tilde{y}}\right|}{\left|\tilde{x}-\tilde{y}\right|} = \frac{\left|e_{\tilde{x}}\right|}{\left|\tilde{x}-\tilde{y}\right|}+\frac{\left|e_{\tilde{y}}\right|}{\left|\tilde{x}-\tilde{y}\right|} = \frac{\left|\tilde{x}\right|}{\left|\tilde{x}-\tilde{y}\right|}\cdot r_{\tilde{x}}+\frac{\left|\tilde{y}\right|}{\left|\tilde{x}-\tilde{y}\right|} r_{\tilde{y}}+\frac{1}{2}b^{-n+1}$$

Çarpmada Hata

$\tilde{x}, \tilde{y}$ çarpılan yaklaşık 2 sayı olmak üzere x,y gerçek değerinin çarpımının;

a) $\left(\left|\tilde{x}+e_{\tilde{x}}\right|\right)\cdot\left(\left|\tilde{y}+e_{\tilde{y}}\right|\right) = \left|\tilde{x}\cdot\tilde{y}\right|+\left|\tilde{x}\cdot e_{\tilde{y}}\right|+\left|\tilde{y}\cdot e_{\tilde{x}}\right|+\left|e_{\tilde{x}}\cdot e_{\tilde{y}}\right| \rightarrow$ alabileceği en büyük değer

b) $\left(\left|\tilde{x}-e_{\tilde{x}}\right|\right)\cdot\left(\left|\tilde{y}-e_{\tilde{y}}\right|\right) = \left|\tilde{x}\cdot\tilde{y}\right|-\left|\tilde{x}\cdot e_{\tilde{y}}\right|-\left|\tilde{y}\cdot e_{\tilde{x}}\right|+\left|e_{\tilde{x}}\cdot e_{\tilde{y}}\right| \rightarrow$ alabileceği en küçük değer

a $\rightarrow \left|\tilde{x}\cdot\tilde{y}\right|+\left(\left|\tilde{x}\cdot e_{\tilde{y}}\right|+\left|\tilde{y}\cdot e_{\tilde{x}}\right|\right)$

b $\rightarrow \left|\tilde{x}\cdot\tilde{y}\right|-\left(\left|\tilde{x}\cdot e_{\tilde{y}}\right|-\left|\tilde{y}\cdot e_{\tilde{x}}\right|\right)$

çarpmadaki mutlak hata;

$$\left|e_{\tilde{x}\tilde{y}}\right| = \left|\tilde{x}e_{\tilde{y}}\right|+\left|\tilde{y}e_{\tilde{x}}\right|$$

Göreli hata;

$$r_{\tilde{x}\tilde{y}} = \frac{\left|e_{\tilde{x}\tilde{y}}\right|}{\left|\tilde{x}\tilde{y}\right|} = \frac{\left|\tilde{x}e_{\tilde{y}}\right|}{\left|\tilde{x}\tilde{y}\right|}+\frac{\left|\tilde{y}e_{\tilde{x}}\right|}{\left|\tilde{x}\tilde{y}\right|} = r_{\tilde{x}}+r_{\tilde{y}}+\frac{1}{2}b^{-n+1}$$

Bölmedeki Hata

$\frac{x}{y}$, $\frac{|\tilde{x}|+|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{y}|-|e_{\tilde{y}}|}$ alabileceği en büyük değer.

$\dfrac{|\tilde{x}|-|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{y}|+|e_{\tilde{y}}|}$ den küçük olamaz.

$$\frac{|\tilde{x}|+|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{y}|-|e_{\tilde{y}}|}=\frac{|\tilde{x}\tilde{y}|+|\tilde{x}e_{\tilde{y}}|+|\tilde{y}e_{\tilde{x}}|+\cancel{|e_{\tilde{x}}e_{\tilde{y}}|}}{\cancel{\tilde{y}^2-e_{\tilde{y}}^{\ 2}}}$$

$$\left(|\tilde{y}|+|e_{\tilde{y}}|\right)$$

$$\frac{|\tilde{x}|-|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{y}|+|e_{\tilde{y}}|}=\frac{|\tilde{x}\tilde{y}|-|\tilde{x}e_{\tilde{y}}|-|\tilde{y}e_{\tilde{x}}|+\cancel{|e_{\tilde{x}}e_{\tilde{y}}|}}{\cancel{\tilde{y}^2-e_{\tilde{y}}^{\ 2}}}$$

$$\left(|\tilde{y}|-|e_{\tilde{y}}|\right)$$

$\dfrac{|\tilde{x}|}{|\tilde{y}|}+\dfrac{|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{y}|}+\dfrac{|\tilde{x}e_{\tilde{y}}|}{\tilde{y}^2}$ ve $\dfrac{|\tilde{x}|}{|\tilde{y}|}-\dfrac{|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{y}|}-\dfrac{|\tilde{x}e_{\tilde{y}}|}{\tilde{y}^2}$

$\left|\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|+\left|\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\cdot\left(\left|\dfrac{e_{\tilde{x}}}{\tilde{x}}\right|+\left|\dfrac{e_{\tilde{y}}}{\tilde{y}}\right|\right)$ ve $\left|\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|-\left|\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\cdot\left(\left|\dfrac{e_{\tilde{x}}}{\tilde{x}}\right|+\left|\dfrac{e_{\tilde{y}}}{\tilde{y}}\right|\right)$

Mutlak Hata;

$$\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\cdot\left(\left|\frac{e_{\tilde{x}}}{\tilde{x}}\right|+\left|\frac{e_{\tilde{y}}}{\tilde{y}}\right|\right)=\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\left(r_x+r_y\right)=e\,\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$$

Göreli Hata;

$$r_{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}}=\frac{\left|e_{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}}\right|}{\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}=\frac{\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\left(r_x+r_y\right)}{\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}=r_x+r_y+\frac{1}{2}b^{-n+1}$$

Örnek:

$x=0.79425\quad e_x=0.00043$

$y=1.27348\quad e_y=0.00028$

Göreli hatalarını bulunuz.

$$r_{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}}=r_x+r_y+\frac{1}{2}b^{-5+1}=0.00081$$

Örnek:

A noktasının koordinatları mutlak hata $\left(e_{\tilde{x}} = e_{\tilde{y}}\right) = 0.01$ ile $\tilde{x} = 25.21,\ \tilde{y} = 12.10$ olarak ölçülmüş. $[OA]$ doğrusunun eğiminde yapılan mutlak ve göreli hatayı hesaplayınız.

$$\tan\theta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{12.10}{25.21} = 0.479$$

$$\left|e_{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}}\right| = \left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right| \cdot \left|\frac{e_{\tilde{x}}}{\tilde{x}} + \frac{e_{\tilde{y}}}{\tilde{y}}\right|$$

$$r_{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}} = r_{\tilde{x}} + r_{\tilde{y}} = \frac{|e_{\tilde{x}}|}{|\tilde{x}|} + \frac{|e_{\tilde{y}}|}{|\tilde{y}|} = \frac{0.01}{25.21} + \frac{0.01}{12.10} = 0.00122312$$

$$r_{\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}} = \frac{\left|e_{\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right|}{\left|\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right|} \ , \ \left|\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right| = 0.479$$

$$r_{\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}} = 0.00122312 \cdot \frac{12.10}{25.21} = 0.000587$$

$$r_{\tilde{f}} = \frac{\left|e_{\tilde{f}}\right|}{\left|\tilde{f}\right|} = \frac{\frac{202}{9}}{-28} = 0.80 \rightarrow \%80$$

Örnek:

Aşağıdaki ölçümlerden hangisi daha hassastır ?

$i)$ 100 kg hatayla ölçen bir kantarda bir vagonun ağırlığı 50 ton,

$ii)$ 0.01 gr hatayla ölçen bir terazide bir ilaç 5 gr olarak ölçülmüş,

$i)$ $\begin{array}{l} \tilde{a} = 50 \cdot 10^3 kg \\ e = 100 kg \end{array}$ $\qquad r = \left|\frac{e}{\tilde{a}}\right| = \frac{100}{50 \cdot 10^3} = 0.002$

$ii)$ $\begin{array}{l} \tilde{a} = 5 gr \\ e = 10^{-2} gr \end{array}$ $\qquad r = \left|\frac{e}{\tilde{a}}\right| = \frac{0.01}{5} = 0.002$

Karekök Hesabında Kullanılan Ardışık Yöntem

$\sqrt{b}$ yi hesaplamak için;

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n} \right), n = 0,1,2,\ldots, x_n$$

$\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon$ ise işlemi durdur.

Örnek:

$x_0 = 2$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$, $\sqrt{6.25} = ?$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{6.25}{2} \right) = 2.5625$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2.5625 + \frac{6.25}{2.5625} \right) = 2.5007621$$

$$x_3 = 2.500000116$$
$$x_4 = 2.500000111$$
$$\left| x_4 - x_3 \right| = 0.000000005 \le \varepsilon$$

Örnek:

$f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonun $x_0 = 0.2$ noktasındaki değerini MacLauren açılımındaki ilk dört terimi alarak hesaplayıp kesme hatası için bir üst sınır bulunuz.

Taylor seri açılımı;

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f'(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots$$

$$x_0 = 0$$

$$f(x) = f(0) + (x - 0) \cdot \frac{f'(0)}{1!} + (x - 0)^2 \cdot \frac{f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x)$$

$$f(0) = \ln(1+0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

$$f^4(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -6$$

$$\tilde{f}(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{6}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\tilde{f}(0.2) = 0 + 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{2}{6}(0.2)^3 = 0.2 - 0.2 + 0.00266 = 0.18266$$

$$\ln(1.2) = 0.1823215$$

$$|e_f| = \left| f(x) \cdot \tilde{f}(x) \right| = 0.00034$$

$$R_n(x) = R_4(\xi) = \left| \frac{x^4}{4!} \cdot \left(-\frac{6}{(1+\xi)^4} \right) \right|$$

$$R_4(0.2) = \frac{(0.2)^4}{4!} \cdot \left(-\frac{6}{(1+0)^4} \right) \leq \frac{(0.2)^4}{4} = 0.0004 \rightarrow$$

$$\ln(1.2) = 0.18266 \pm 0.0004$$

Örnek:

$f(x) = x^2$ üstel fonksiyonun l noktasında Taylor seri açılımı yaparak ilk iki terime gre yaklaşık değerini hesaplayınız. x=2 için yapılan hatayı bulunuz.

Çözüm:

$$x_0 = 1$$

$$f(x) = f(x_0) + f(x - x_0) \cdot \frac{f'(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 2x = 2$$

$$f(\tilde{x}) = 1 + (x-1) \cdot \frac{2}{1!} = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

$$f''(x) = 2$$

$$\tilde{f}(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Örnek:

Bir ölçme aletiyle yapılan hata mutlak değerce 0.1mm’ den küçüktür. Böyle bir aletle dikdörtgensel levhanın genişliği 10mm, uzunluğu da 12mm olarak ölçülmüştür. Dikdörtgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

$$\tilde{a} = 12mm$$
$$\tilde{b} = 10mm$$
$$|e| = 0.1mm$$
$$a = \tilde{a} \pm e_{\tilde{a}} = 12 \pm 0.1$$
$$b = \tilde{b} \pm e_{\tilde{b}} = 10 \pm 0.1$$
$$\tilde{Ç} = 2 \cdot \left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) = 2 \cdot (12 + 10) = 44mm$$
$$\left|e_{\tilde{Ç}}\right| = 2 \cdot \left|e_{\tilde{a}} + e_{\tilde{a}}\right| = 2 \cdot |0.1 + 0.1| = 0.4mm$$
$$Ç = 44 \pm 0.4$$
$$\tilde{S} = \tilde{a} \cdot \tilde{b} = 10 \cdot 12 = 120mm^2$$
$$r_{\tilde{S}} = r_{\tilde{a}} + r_{\tilde{b}} = \frac{\left|e_{\tilde{a}}\right|}{|\tilde{a}|} + \frac{\left|e_{\tilde{b}}\right|}{\left|\tilde{b}\right|} = \frac{|0.1|}{|12|} + \frac{|0.1|}{|10|} = \frac{2.2}{120}$$
$$r_{\tilde{S}} = \frac{\left|e_{\tilde{S}}\right|}{\left|\tilde{S}\right|} \Rightarrow \left|e_{\tilde{S}}\right| = r_{\tilde{S}} \cdot \left|\tilde{S}\right| = \frac{2.2}{120} \cdot 120 = 2.2$$
$$S = 120 \pm 2.2$$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)