BÖLÜM 4

<u>Newton-Raphson Yöntemi</u>

$f(x)=0$ denkleminin α kökü $[a_0,b_0]$ aralığında olsun.($\left(f(a_0)\cdot f(b_0)\right)<0$,sürekli ve türevlenebilir.)

$x_0 \in [a_0,b_0]$ seçerek $\left(x_0, f(x_0)\right)$ dan geçen teğetin denklemini oluşturacağız.

$$y-f(x_0)=f(x_0)(x-x_0)$$

$0-f(x_0)=f^{'}(x_0)(x-x_0) \rightarrow$ x i çekip x_1 yaz.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Durdurma kuralı;

1) n adımda durulur.

2) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

3) $|f(x_n)| < \rho$

Teorem : $f(x), f^{'}(x), f^{''}(x) \in C(I), f(\xi)=0, \xi \in I$ olsun. $f^{'}(\xi) \neq 0$

Eğer $x_0 \in I$ alınırsa Newton-Raphson ardışık yineleme formülü ile $x=\xi$ köküne yakınsayacaktır.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

Örnek: $xe^x - 1 = 0,\ [0,1], x_0 = 0.5, \varepsilon = 10^{-4}$

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1.718 > 0$

$f(0) \cdot f(1) < 0$ ise verilen aralıkta denklemin bir kökü vardır.

$f'(x) = e^x + xe^x$

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.5 \cdot e^{0.5} - 1}{e^{0.5} + 0.5 \cdot e^{0.5}} = 0.57102$$

$$|x_1 - x_0| = |0.57102 - 0.5| = 0.07102 > \varepsilon$$

$$x_2 = 0.57102 - \frac{0.57102 \cdot e^{0.57102} - 1}{e^{0.57102} + 0.57102 \cdot e^{0.57102}} = 0.56716$$

$$|x_2 - x_1| = |0.56716 - 0.57102| = 0.00386 > \varepsilon$$

$$x_3 = 0.56716 - \frac{0.56716 \cdot e^{0.56716} - 1}{e^{0.56716} + 0.56716 \cdot e^{0.56716}} = 0.56714$$

$|x_3 - x_2| = |0.56714 - 0.56716| = 0.00002 < \varepsilon$ olduğundan

$\tilde{\alpha} = x_3 = 0.56714$

BASİT İTERASYON YÖNTEMİ

$f(x) = 0$ olarak verilen denklem $x = g(x)$ biçimine getirilir ve bir x_0 başlangıç değeri seçilir. $x_{n+1} = g(x_n)$ ardışık yineleme ile çözüme gidilir. Durdurma kuralı;

1) Belirlenen n adım sonunda durulur.

2) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ise dur.

3) $f(x_n) < \rho$ ise dur.

Tanım: (X,d), (Y,d') metrik uzayı ve $g: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

$\forall x_1, x_2 \in X$ için $d'\left(g(x_1), g(x_2)\right) \le a d(x_1, x_2)$ olacak şekilde $a \in (0,1)$ sayısı varsa g fonksiyonuna büzülme fonksiyonu denir.

Teorem 1: $g: X \to Y$ bir büzülme fonskiyonu bir düzgün sürekli fonksiyondur.

Teorem 2 (X,d) tam metrik uzay olsun. $g: X \to X$ bir büzülme fonksiyonu olsun. Bu durumda g fonksiyonu bir tek sabit noktaya sahiptir. $g(\alpha) = \alpha$ olacak şekilde $\alpha \in X$ vardır ve tektir.

Teorem 3: $g: R \to R$, $\forall x \in R$ için $|g'(x)| < 1$, g fonksiyonu bir büzülme fonksiyonudur.

<u>İspat</u> $x_1, x_2 \in R$, $d\left(g(x_1), g(x_2)\right) \le a d(x_1, x_2)$, $a \in (0,1)$

$$\frac{|g(x_2) - g(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = g'(\xi), \quad x_1 < \xi < x_2$$

$$\begin{aligned} d\left(g(x_2), g(x_1)\right) = |g(x_2) - g(x_1)| &= |g'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)| \\ &\le |g'(\xi)| \cdot |(x_2 - x_1)| \\ &= |g'(\xi)| \cdot d(x_1, x_2) \to |g'(\xi)| < 1 \end{aligned}$$

Sonuç: $f(x) = 0$ denklemi $g(x) = x$ biçiminde yazılsın. g bir büzülme fonksiyonu ve $\alpha = g(\alpha)$ olacak şekilde bir tek α vardır. Oda $f(x) = 0$ denkleminin köküdür.

<u>ÖRNEK</u>: $f(x) = x^3 - x - 1$ denklemin kökünü basit iterasyon yöntemiyle bulunuz. $\varepsilon = 10^{-2}$, $x_0 = 1$

$$x = x^3 - 1$$

$$g_1(x) = x^3 - 1$$

$|g'_1(x)| = |3x^2| = 3 > 1$ olduğundan dolayı $g_1(x) = x^3 - 1$ olarak alınamaz.

$$x^3 = x + 1 \Rightarrow x = (x+1)^{1/3}$$

$$g_2(x) = (x+1)^{1/3}$$

$$\left|g'_2(x)\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(x+1)^{-2/3}\right|$$

$$\left|g'_2(1)\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+1)^{2/3}}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2/3}}\right| = 0.21 < 1$$ olduğundan $g_2(x)$ fonksiyonu kullanılabilir.

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$x_1 = g(x_0) = (x_0+1)^{1/3} = 1.26$$

$$x_2 = g(x_1) = (x_1+1)^{1/3} = 1.31$$

$$x_3 = g(x_2) = (x_2+1)^{1/3} = 1.32 \rightarrow |x_3 - x_2| = |1.32 - 1.31| = 0.01 \leq \varepsilon$$

Kök 1.32'dir.

<u>ÖRNEK:</u> $f(x) = xe^{-x} - 1,\ \varepsilon = 2\cdot 10^{-2},\ x_0 = 0.5$ basit iterasyon yöntemiyle bulunuz.

$$x = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$\left|g'(x)\right| = \left|-e^{-x}\right| = 0.66 < 1$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x}$$

$$x_1 = g(x_0) = 0.606$$

$$x_2 = g(x_1) = 0.545 \rightarrow |0.545 - 0.606| = 0.061 > 0.02$$ olduğundan devam edilir.

$$x_3 = g(x_2) = 0.579 \rightarrow |0.579 - 0.545| = 0.034 > 0.02$$

$$x_4 = g(x_3) = 0.560 \rightarrow |0.560 - 0.579| = 0.019 < 0.02$$ olduğundan dolayı durulur.

Kök 0.560'dir.

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)