BÖLÜM 8

Bölünmüş Farklar Tablosu

$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ değerleri için $f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ fonksiyon değerleri bilinsin. Bölünmüş farklar tablosu

$$
\begin{array}{ll l l l}
\underline{x} & \underline{f(x)} & & & \\
x_0 & f(x_0) & \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)} = f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f(x_1) & & = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = f[x_0,x_1,x_2] & \\
x_2 & f(x_2) & \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} = f[x_1,x_2] & & \\
\cdot & & & & ...f[x_0,x_1,...,x_n] \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & = \dfrac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}} = f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \\
x_n & f(x_n) & \dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{(x_n-x_{n-1})} = f[x_{n-1},x_n] & &
\end{array}
$$

şeklinde oluşturulur.

Newton bölünmüş fark interpolasyonu

Yukarıdaki bölünmüş farklar tablosu kullanılarak $f(x_0) = f[x_0]$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = & f[x_0] + (x-x_0) f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2] + ... \\
& + (x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_n-1) f[x_0,x_1,x_2,...,x_n] = \tilde{f}(x)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Newton bölünmüş fark interpolasyon formülü denir.

ÖRNEK:

$$
\begin{array}{ll l l}
\underline{x} & \underline{f(x)} & & \\
x_0 = -1 & f(x_0) = -3 & \dfrac{0-(-3)}{(1-(-1))} = \dfrac{3}{2} & \\
x_1 = 1 & f(x_1) = 0 & & = \dfrac{4-\frac{3}{2}}{2-(-1)} = \dfrac{5}{6} \\
x_2 = 2 & f(x_2) = 4 & \dfrac{4-0}{(2-1)} = 4 &
\end{array}
$$

Bölünmüş farklar tablosunu kullanarak $x = \dfrac{3}{2}$ deki değeri bulunuz.

$$P_2(x) = -3 + \left(x-(-1)\right)\cdot\frac{3}{2} + \left(x-(-1)\right)\cdot(x-1)\cdot\frac{5}{6}$$

$$= \frac{5x^2+9x-14}{6} = \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{3}{2}\right) - 14}{6} = 1.79166$$

<u>Eşit Aralıklı Noktalarda İnterpolasyon</u>

$x_0, \dots, x_n$ noktaları arasındaki fark eşit olsun.

$i = 0,1,\dots,n-1$ için $h = x_{i+1} - x_i$ ve $x = x_0 + sh$ olsun. Bu durumda

$$x - x_i = x_0 + sh - (x_0 + ih) = (s-i)h$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0+sh) \\ &= f[x_0] + shf[x_0,x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0,x_1,x_2] + \dots + s(s-1)\dots(s-n+1)h^n f[x_0,x_1,\dots,x_n] \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\dots(s-k+1)h^k f[x_0,x_1,\dots,x_k] \end{aligned}$$

<u>ÖRNEK:</u>

x	$f(x)$			
$x_0 = 0$	1			
		$\frac{6-1}{1-0} = 5$		
$x_1 = 1$	6		$= \frac{-1-5}{2-0} = -3$	
		$\frac{5-6}{2-1} = -1$		$= \frac{-4-(-3)}{3-0} = -\frac{1}{3}$
$x_2 = 2$	5		$= \frac{-9-(-1)}{3-1} = -4$	
		$\frac{-4-5}{3-2} = -9$		
$x_3 = 3$	-4			

Eşit aralıklı olması durumu için Newton bölünmüş fark yöntemi ile 3. dereceden yazınız.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0+sh) \\ &= f[x_0] + shf[x_0,x_1] + sh^2(s-1) f[x_0,x_1,x_2] + s(s-1)(s-2)h^3 f[x_0,x_1,x_2,x_3] \end{aligned}$$

$$x = x_0 + sh$$
$$0.5 = 0 + 1s$$
$$s = 0.5$$

$$\begin{aligned} P_3(0.5) &= P_n(x_0+sh) \\ &= 1 + (0.5\times1\times5) + (0.5\times1^2\times(0.5-1)) - 3 + \left(0.5\times(0.5-1)(0.5-2)\times1^3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= 1 + 2.5 + 0.75 + (-0.125) = 4.125 \end{aligned}$$

$$x = x_0 + sh$$
$$2.5 = 0 + 1s$$
$$s = 2.5$$

$$P_3(2.5) = P_n(x_0 + s \cdot h)$$
$$= 1 + 2.5 \cdot 1 \cdot 5 + 2.5 \cdot 1^2 \cdot (2.5-1) \cdot -3 + 2.5 \cdot (2.5-1) \cdot (2.5-2) \cdot 1^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 1 + 12.5 + (-11.25) + (-0.625) = 1.625$$

Newton ileri Fark Yöntemi

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ olmak üzere Δ ileri fark operatörünü göstersin. Bu lineer operatör için,

$$\Delta f(x) = \Delta f_i$$

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)$$
$$= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^r f_i = \Delta^{r-1} f_{i+1} - \Delta^{r-1} f_i \rightarrow$$

x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
x_{-3}	$f(x_{-3})$						
		Δf_{-3}					
x_{-2}	$f(x_{-2})$		$\Delta^2 f_{-3}$				
		Δf_{-2}		$\Delta^3 f_{-3}$			
x_{-1}	$f(x_{-1})$		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$		
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$		$\Delta^5 f_{-3}$	
x_0	$f(x_0)$		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$		$\Delta^6 f_{-3}$
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$		$\Delta^5 f_{-2}$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$			
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f_1$				
		Δf_2					
x_3	$f(x_3)$						
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

Ve genel olarak

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) \\ &= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)\Delta^2 f_0}{2!} + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)\Delta^n f_0}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \rightarrow \textit{Newton ileri fark yöntemi} \end{aligned}$$

Örnek: $x = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ için $f(x) = cos(x)$ fonksiyonu için Newton ileri fark tablosunu oluşturunuz. $f(0.35)$ ve $f(0.54)$ değerlerini Newton ileri fark interpolasyonu yaklaşımı ile bulunuz.

Çözüm:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0.3	0.95534			
		0.92104-0.95534=-0.03428		
0.4	0.92106		-0.04348-(-0.03428)=-0.0092	
		0.87758-0.92106=-0.04348		-0.00877-(-0.0092)=0.00043
0.5	0.87758		-0.05225-(-0.04348)=-0.00877	
		0.82534-0.87758=-0.05225		
0.6	0.82534			

$$x = x_0 + sh$$

$$0.35 = 0.3 + s(0.1) \Rightarrow s = 0.5$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) \\ &= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)\Delta^2 f_0}{2!} + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)\Delta^n f_0}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \end{aligned}$$

$$P_3(0.35) = 0.95534 + (0.5)(-0.03428) + \frac{(0.5)(0.5-1)(-0.0092)}{2!} + \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)0.00043}{3!}$$

$$\begin{aligned} &= 0.95534 - 0.01714 + 0.00115 + 0.00003 \\ &= 0.93938 \end{aligned}$$

$$\cos(0.35) = 0.93937$$

$x = 0.54$ için
$x = x_0 + sh$

$$0.54 = 0.3 + s(0.1) \Rightarrow s = 2.4$$

$$P_3(0.54) = 0.95534 + (2.4)(-0.03428) + \frac{(2.4)(2.4-1)(-0.0092)}{2!} + \frac{(2.4)(2.4-1)(2.4-2)0.00043}{3!}$$

$$\begin{aligned} &= 0.95534 - 0.08227 - 0.01545 + 0.0001 \\ &= 0.85772 \end{aligned}$$

$$\cos(0.54) = 0.8577$$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)