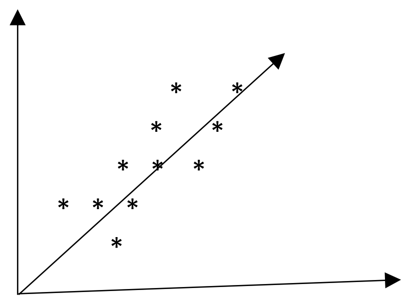
BÖLÜM 9

FONKSİYON YAKLAŞIMI

Belli Noktada Değerleri Bilinen Fonksiyonlar İçin Yaklaşım

X , $(x_1, x_2, ..., x_n)$ değerlerini alan ve Y , $(y_1, y_2, ..., y_n)$ değerlerini alan iki rastgele değişken olsun. Bu iki değişken arasındaki ilişki,doğrusal regresyon çözümlemesi ile incelenebilir.
X rastgele değişkeni bağımsız değişken, Y rastgele değişkeni bağımlı değişkenİ göstersin. n tane. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)..., (x_n, y_n)$ ile gösterilen verilerin koordinat düzlemi üzerinde serpilme diyagramı çizilebilir.



X ile Y arasındaki gerçek bağıntı,
$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \rightarrow$ Kitle için regresyon modeli
doğru denklemi ile ifade edilir.
Y : Bağımlı değişken
X : Bağımsız değişken
β_0 : Regresyon doğrusunun y eksenini kestiği nokta
β_1 : Regresyon katsayısı (Aynı zamanda doğrunun eğimi)
ε : Hata terimi (Bağımlı değişkenin gerçek değeri ile gözlenen değeri arasındaki farkı gösterir.)
β_0 ve β_1 bilinmeyen regresyon katsayılarıdır.

Kitleden n birimlik örneklem için doğrusal regresyon denklemi:
$y_i = a_0 + a_1 x_i + e_i, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$

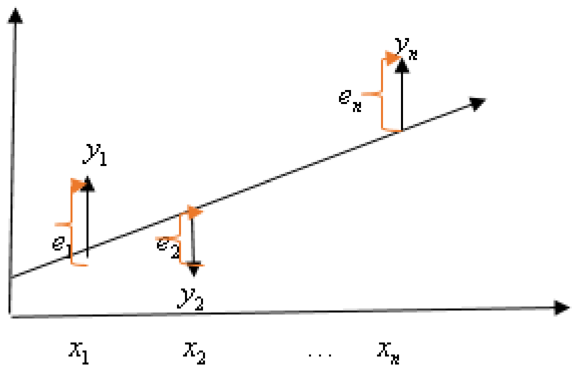
biçiminde tanımlanır. Bilinen bir x_j değeri için y_j değeri tahmin edilir.Tahmini doğrusal regresyon denklemi
$\hat{y}_j = a_0 + a_1 x_j, \quad j = 1, 2, 3, ..., n$
biçimindedir.
a_0 : regresyon doğrusunun y eksenini kestiği noktayı gösterir. Aynı zamanda β_0'ın tahminidir.
a_1 : regresyon katsayısıdır. Doğrunun eğimini gösterir. Bağımsız değişkendeki bir birimlik değişmenin bağımlı değişkende yapacağı değişimi gösterir. β_1'in tahminidir.

e_j: j. Gözlemin hata terimidir. Gözlenen değer ile tahmini değer arasındaki farktır.

$e_j = y_j - \hat{y}_j$ dir. Hata terimleri ortalaması sıfır varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahiptir. $e \sim N(0, \sigma^2)$

$$\text{varsayımlar:}\begin{cases} E\left(e_j\right) = 0 \\ Var\left(e_j\right) = \sigma^2 \\ e_1, e_2, \ldots, e_n \text{'ler bağımsız} \end{cases}$$

En Küçük Kareler Yöntemi (EKK) İle β_0 Ve β_1 Katsayılarının Tahmini:



$$\hat{y} = a_0 + a_1 x,$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - a_0 - a_1 x_j\right)^2$$

a_0 ve a_1

$\min \sum_{j=1}^{n} e_j^2$ olması istenir.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_j^{\,2}}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^{n} e_j^{\,2}}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_j - a_0 - a_1 x_j\right)\left(-1\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = n a_0 + a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_j^{\,2}}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^{n} e_j^{\,2}}{\partial a_1} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - a_0 - a_1 x_j\right)\left(-x_j\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = a_0 \sum_{j=1}^{n} x_j + a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \qquad (2)$$

(1) Eşitliği $-\sum_{j=1}^{n} x_j$ ile (2) eşitliği n ile çarpılıp taraf taraf toplanırsa

$$-\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{j=1}^{n} y_j = -na_0 \sum_{j=1}^{n} x_j - a_1 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

$$n\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = na_0 \sum_{j=1}^{n} x_j + na_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$n\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{j=1}^{n} y_j = na_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - a_1 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

Elde edilir. Buradan

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right)\left(y_j - \overline{y}\right)}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - n\overline{xy}}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - n\overline{x}^2},$$

(1) denkleminden

$$\sum_{j=1}^{n} y_j - a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j = na_0$$

$$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{n} - a_1 \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = \overline{y} - a_1\overline{x} \Rightarrow a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

Olarak bulunur.

(1) Ve (2) denkleminden

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = na_0 + a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = a_0 \sum_{j=1}^{n} x_j + a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{j=1}^{n} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} x_j & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} y_j \\ \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \end{bmatrix}$$

Şeklinde de hesaplanabilir.

$q(x) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m$ olsun.

$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right)^2 = S\left(a_0, \ldots, a_m\right) \to \min$ yapılacak

$$\frac{\partial S\left(a_0, \ldots, a_m\right)}{\partial a_0} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial S\left(a_0, \ldots, a_m\right)}{\partial a_m} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_p x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_0 x_i^m + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^{m+1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_p x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i$$

Şeklinde m . Dereceden bir polinom yardımıyla temsil edilebilir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

Lineer sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ parametreleri bulunur.

Eğer $q(x) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2\right)\right)^2=S\left(a_0,a_1,a_2\right)\to\min$$ yapılacak

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i \end{bmatrix}$$

ÖRNEK:

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$f(x_i)$	0,9	1,9	2,8	3,3	4,2

f fonksiyonuna $q(x)=a_0+a_1x$ şeklinde bir fonksiyon ile EKK yöntemine göre yaklaşımda bulununuz.

$$q(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_0+a_1x$$

$$\begin{bmatrix} n=5 & \sum_{i=1}^{5}x_i=2 \\ \sum_{i=1}^{5}x_i=2 & \sum_{i=1}^{5}x_i^2=1.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}==\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5}f(x_i)=13.1 \\ \sum_{i=1}^{5}x_if(x_i)=6.84 \end{bmatrix}$$

$$5a_0+2a_1=13.1$$

$$2a_0+1.2a_1=6.84$$

$$a_0=1.02$$
$$a_1=4$$

$$q(x)=1.02+4x$$

Örnek: f fonksiyonuna $q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ şeklinde bir fonksiyonla yaklaşımda bulununuz.

L_p **Yaklaşımı**

$f : I \subset R \to R$

$f(x) = y(x)$ sürekli olsun.

$$S = \int_I \left(y(x) - \left(a_0 + a_1 x ... + a_m x^m \right) \right)^2 dx$$

İntegralini minimum yapacağız. Burada

$$q(x) = a_0 + a_1 x ... + a_m x^m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

Şeklinde polinomdur.

$$S = \int_I \left(y(x) - \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \right)^2 dx$$

$$= \int_I \left(y(x) \right)^2 dx - 2\sum_{k=0}^{m} a_k \int_I x^k y(x) dx + \int_I \left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \right) dx$$

Şeklinde yazılır. S'nin minimum olması için gerekli koşul

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \ , \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \ ,..., \ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0$$

Olmalıdır. Böylece $m+1$ bilinmeyenli $m+1$ tane denklem oluşur.

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \int_I x^{j+k} dx = \int_I x^j y(x) dx \ , \quad j = 0,1,2,...,m$$

Şeklinde normal denklemler elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \int_I dx & \int_I x dx & \cdots & \int_I x^m dx \\ \int_I x dx & \int_I x^2 dx & \cdots & \int_I x^{m+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_I x^m dx & \int_I x^{m+1} dx & \cdots & \int_I x^{2m} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_I y(x) dx \\ \int_I x y(x) dx \\ \vdots \\ \int_I x^m y(x) dx \end{bmatrix}$$

Çözülerek $a_0, a_1, ..., a_m$ katsayıları bulunur. $q(x) = a_0 + a_1 x ... + a_m x^m$ polinomunda yerine konularak istenen polinom elde edilir.

ÖRNEK:

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$f(x_i)$	0,9	1,9	2,8	3,3	4,2

f fonksiyonuna $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ şeklinde bir fonksiyon ile EKK yöntemine göre yaklaşımda bulununuz.

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x$$

$$\begin{bmatrix} n = 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i = 2 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i = 2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13.1 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i f(x_i) = 6.84 \end{bmatrix}$$

$$5a_0 + 2a_1 = 13.1$$

$$2a_0 + 1.2a_1 = 6.84$$

$$a_0 = 1.02$$
$$a_1 = 4$$

$$\varphi(x) = 1.02 + 4x$$

ÖRNEK:

$$f : [0,1] \to R$$

$x \to f(x) = e^x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 2. Dereceden polinom denklemine L_2 yaklaşımında bulununuz.

$$\int_0^1 1 dx = x\Big|_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\int_I y(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \left.e^x\right|_0^1 = e-1$$

$$\int_I xy(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = \left.xe^x\right|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (e-0) - \left.e^x\right|_0^1 = e-e+1=1$$

$$\left(u.v - \int v\,du\right)$$

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^x dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int_I x^2 y(x)\,dx = \int_0^1 x^2 e^x\,dx = \left.x^2 e^x\right|_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx = (e-0)-2 = e-2$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= e^x dx \\ du &= 2x\,dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0130 \\ 0.8511 \\ 0.8392 \end{bmatrix}$$

$$q(x) = 1.0130 + 0.8511x + 0.8392x^2$$

$x = 0.5$ için;

$$q(0.5) = 1.0130 + 0.8511(0.5) + 0.8392(0.5)^2 = 1.64835$$

$f(x) = e^x \Rightarrow f(0.5) = e^{0.5} = 1.64872$ (Gerçek)

Örnek:

x_i	-3	0	2	4
$f(x_i)$	3	1	1	3

f fonksiyonuna $q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ şeklinde bir fonksiyon ile EKK yöntemine göre yaklaşımda bulununuz.

$$q(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\begin{bmatrix} n=4 & \sum_{i=1}^{4} x_i = 3 & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 3 & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 & \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 45 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 & \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 45 & \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 8 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 5 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 f(x_i) = 79 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n=4 & \sum_{i=1}^{4} x_i = 3 & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 3 & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 & \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 45 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 & \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 45 & \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 353 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 8 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 5 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 f(x_i) = 79 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.626 & 0.019 & -0.054 \\ 0.019 & 0.044 & -0.00709 \\ -0.054 & -0.00709 & 0.00816 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.851 \\ -0.192 \\ 0.178 \end{bmatrix}$$

$$q(x)=0.851-0.192x+0.178x^2$$

$x=2.5$ için

$$q(2.5)=0.851-0.192(2.5)+0.178(2.5)^2 = 1.4835$$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)