BÖLÜM 11

Adil Türevli Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içeren denklemelere diferansiyel denklemler denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece bir tek bağımsız değişkene bağlı ise o tür diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bilinmeyen değişken en az iki bağımsız değişkene bağlı ise böyle denklemlere de kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek türeve o denklemin basamağı ya da mertebesi denir. Adi türevli pek çok diferansiyel denklemin analitik çözüm yöntemi olmasına karşılık bir çoğunun da bilinen yöntemler yardımıyla çözümü mümkün olmamaktadır. Hatta değişkenlerine ayrılabilen tipten olsalar bile bazı diferansiyel denklemlerde elemanter yöntemler yardımıyla integral hesabı yapmak zor olabilmektedir. Bu amaçla diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleriyle ilgili olarak pek çok araştırma yapılmış ve analitik çözümlere yakın sonuçlar veren çok sayıda yöntem ortaya konmuştur. Dikkat edilmesi gereken nokta verilen şartlara uygun bir çözümün varlığı ve tekliğinin araştırılması tekniğidir.

$$y' = f(x,y)$$

$y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemi için verilecek olan tüm çözüm yöntemleri;

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

şeklinde ifade edilen sistemler içinde geçerlidir.

Birinci Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Euler Yöntemi

x_0 noktasındaki $y(x_0) = y_0$ değeri belli iken $h > 0$ olmak üzere $x_1 = x_0 + h$ noktasındaki fonksiyon değeri

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y'\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)\,dx$$

$$y(x_0+h) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)\,dx$$

$$y(x_0+h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)\,dx + y(x_0)$$

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu $x_0 \le x \le x_1$ aralığında yavaş değişiyorsa denklemdeki $f(x,y)$ değeri yaklaşık olarak $f(x_0, y_0)$ alınabilir.

$$y(x_0+h) \cong y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0, y_0)\,dx$$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

Olarak bulunur.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
.
.
.
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Çözüme ait n tane nokta bulunur.

ÖRNEK:

$y' = -y$, $y(0) = 1$ euler yöntemini uygulayarak $h = 0.1$ artma ile $x = 0.4$ kadar hesaplayınız.

($x_0 = 0, y_0 = 1$ başlangıç değerleri)

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 1 + 0.1(-1) = 0.9$$
$$y_2 = 0.9 + 0.1(-0.9) = 0.81$$
$$y_3 = 0.81 + 0.1(-0.81) = 0.729$$
$$y_4 = 0.729 + 0.1(-0.729) = 0.6561$$

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	0.9
2	0.2	0.81
3	0.3	0.729
4	0.4	0.6561

$$y = e^{-x_n}$$

$$\left.\begin{aligned} x_n &= 0 \to 1 \\ x_n &= 0.1 \to 0.9048 \\ x_n &= 0.2 \to 0.8187 \\ x_n &= 0.3 \to 0.7408 \\ x_n &= 0.4 \to 0.6703 \end{aligned}\right\} \textit{Gerçek Değerler}$$

$$\left|e^{-x_n} - y_n\right|$$

$$\left.\begin{aligned} n=0 &\rightarrow |1-1| = 0 \\ n=1 &\rightarrow |0.9048-0.9| = 0.0048 \\ n=2 &\rightarrow |0.8187-0.81| = 0.0087 \\ n=3 &\rightarrow |0.7408-0.729| = 0.0118 \\ n=4 &\rightarrow |0.6703-0.6561| = 0.0142 \end{aligned}\right\} Hatalar$$

Örnek: $y' = x^2 \ln y$, $y(1) = 3$ başlangıç değer problemini ele alalım. $h = 0.1$ alarak çözüme ait üç noktayı euler yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $x_0 = 1$, $y_0 = 3$

$$y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf\left(x_0, y_0\right) = 3 + 0.1(1^2 \ln(3)) = 3.11 \\ x_1 &= x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_1, y_1) = (1.1, 3.11)$$

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf\left(x_1, y_1\right) = 3.11 + 0.1((1.1)^2 \ln(3.11)) = 3.247 \\ x_2 &= x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_2, y_2) = (1.2\ ,\ 3.247)$$

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hf\left(x_2, y_2\right) = 3.247 + 0.1((1.2)^2 \ln(3.247)) = 3.4166 \\ x_3 &= x_2 + h = 1.2 + 0.1 = 1.3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_3, y_3) = (1.3\ ,\ 3.4166)$$

Runge-Kutta Yöntemi

$y' = f\left(x, y\right)$, $\quad y\left(x_0\right) = y_0$ ile tanımlanan başlangıç değer probleminde $x = x_0$ noktasından sonraki bir noktada fonksiyon değeri $x = x_0$ civarında Taylor serisi açılımı kullanılarak doğrudan belirlenebilir. Ancak bu tür bir hesaplamada karşımıza çıkacak yüksek mertebeden türevleri bulmak oldukça zaman alıcı ve zor olabilir. Bu nedenle taylor seri yöntemi yerine, bu serinin doğrudan kullanıldığı Runge-Kutta yöntemini kullanmak büyük kolaylık sağlayacaktır. Burada gerekli olan türevleri bulmak her zaman kolay olmayabilir.

2. Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

$$h = x_i - x_{i-1}$$

$$k_1 = hf\left(x, y\right)$$

$k_2 = hf\left(x+mh, y+mk_1\right)$

$m = 1 \;\; iken$

$k_2 = hf\left(x+h, y+k_1\right)$

$y\left(x+h\right) - y\left(x\right) = ak_1 + bk_2 \rightarrow a = b = \frac{1}{2}$

$y\left(x+h\right) = y\left(x\right) + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$

$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$

ÖRNEK:

$y' = x^2 \ln y$, $y\left(1\right) = 3$, $h = 0.1$ alarak çözüme ait 3 noktayı 2. Mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle bulunuz.

$x_0 = 1 \;\; y_0 = 3$

$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$

$k_1 = 0.1(1^2)\ln\left(3\right) = 0.11$

$k_2 = 0.1\cdot\left(1.1\right)^2 \cdot \ln\left(3.11\right) = 0.137$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 3 + \frac{1}{2}\left(0.11 + 0.137\right) = 3.123 \\ x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 = 1.1, y_1 = 3.123)$$

$k_1 = 0.1\cdot\left(1.1\right)^2 \cdot \ln\left(3.123\right) = 0.138$

$k_2 = 0.1\cdot\left(1.2\right)^2 \cdot \ln\left(3.261\right) = 0.1702$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = 3.123 + \frac{1}{2}\left(0.138 + 0.1702\right) = 3.2771 \\ x_2 = x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1.2, 3.2771)$$

$k_1 = 0.1\cdot\left(1.2\right)^2 \cdot \ln\left(3.2771\right) = 0.171$

$k_2 = 0.1\cdot\left(1.3\right)^2 \cdot \ln\left(3.4481\right) = 0.21$

$$\left.\begin{array}{l} y_3 = 3.2771 + \frac{1}{2}(0.171 + 0.21) = 3.4676 \\ x_3 = x_2 + h = 1.2 + 0.1 = 1.3 \end{array}\right\} \Rightarrow (1.3, 3.4676)$$

<u>Adi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri</u>

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$y_2' = \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$ başlangıç değerlerine göre çözülür.

Euler yöntemine göre;

$$y_1(x_0 + h) \cong y_{10} + hf_1(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0 + h) \cong y_{n0} + hf_n(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

Şeklinde ifade edilir.

İki denklem olursa;

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2)\ ,\ y_1(x_0) = y_{10}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)\ ,\ y_2(x_0) = y_{20}$$

<u>ÖRNEK:</u>

$$y_1' = 2x + y_1 - y_2\ ,\ y_1(0) = 1 = y_{10}$$

$$y_2' = x - 2y_1 + 3y_2\ ,\ y_2(0) = -1 = y_{20}$$

$h = 0.1$ Euler yöntemiyle iki adımda çözünüz.

$$(x_0, y_{10}, y_{20}) = (0, 1, -1)$$

1.Adım

$$f_1(0,1,-1) = 2\cdot 0 + 1 - (-1) = 2$$
$$f_2(0,1,-1) = 0 - 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) = -5$$

$$y_{11}(0.1) = 1 + (0.1)2 = 1.2 \to y_{11}$$
$$y_{21}(0.1) = -1 + (0.1)(-5) = -1.5 \to y_{21}$$

$$(x_1, y_{11}, y_{21}) = (0.1, 1.2, -1.5)$$

2.Adım

$$f_1(0.1, 1.2, -1.5) = 2\cdot 0.1 + 1.2 - (-1.5) = 2.9$$
$$f_2(0,1,-1) = 0.1 - 2\cdot 1.2 + 3\cdot(-1.5) = -6.8$$

$$y_{12}(0.2) = 1.2 + (0.1)\big(2(0.1) + 1.2(-1.5)\big) = 1.04 \to y_{12}$$
$$y_{22}(0.2) = -1.5 + (0.1)\big(0.1 - 2(1.2) + 3(-1.5)\big) = -2.18 \to y_{22}$$

$$(x_2, y_{12}, y_{22}) = (0.2, 1.04, -2.18)$$

Örnek:

$$y_1' = -0.5y_1 \quad , \qquad y_1(0) = 4$$
$$y_2' = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1 , \quad y_2(0) = 6$$

Başlangıç değer probleminin $[0,2]$ arasındaki yaklaşık çözümünü $h = 0.5$ alarak bulunuz.

Çözüm:

$h = 0.5$ Euler yöntemiyle iki adımda çözünüz.

$$(x_0, y_{10}, y_{20}) = (0, 4, 6)$$

1. Adım

$$f_1(0,4,6) = -0.5\times 4 = -2$$
$$f_2(0,4,6) = 4 - 0.3\times 6 - 0.1\times 4 = 1.8$$

$$y_{11}(0.5) = 4 + (0.5)(-2) = 3 \to y_{11}$$
$$y_{21}(0.5) = 6 + (0.5)(1.8) = 6.9 \to y_{21}$$

$$(x_1, y_{11}, y_{21}) = (0.5,\ 3,\ 6.9)$$

2.Adım

$$f_1(0.5,3,6.9) = -0.5\times 3 = -1.5$$
$$f_2(0.5,3,6.9) = 4-(0.3\times 6.9)-0.1\times 3 = 1.63$$

$$y_{12}(0.5) = 3+(-1.5)(0.5) = 2.25 \to y_{12}$$
$$y_{22}(0.5) = 6.9+(0.5)(1.63) = 7.715 \to y_{22}$$

$$(x_2, y_{12}, y_{22}) = (1,\ 2.25, 7.715)$$

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.445
2.0	1.2656	9.0941

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)