

BÖLÜM 12

Nümerik Türev

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \dots$$

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + O(h^2)$$

$$f_i' \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

Örnek: $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x$

$$x_i = 0.5 \quad h = 0.5$$

Çözüm:

$$f_i' \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$x_i = 0.5$ olduğuna göre $x_{i+1} = 1$ ve $x_{i-1} = 0$ olur. Bu değerlerin fonksiyondaki değerleri

$$f(1) = -0.1(1)^4 - 0.15(1)^3 - 0.5(1)^2 - 0.25(1) = -1$$

$$f(0) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x = 0$$

$$f_i' \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{1 - 0}{2(0.5)} = 1$$

Gerçek değer:

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25$$

$$f'(0.5) = -0.4(0.5)^3 - 0.45(0.5)^2 - (0.5) - 0.25 = -0.9125$$

Yapılan görelî hata:

$$r = \left| \frac{-1 - (-0.9125)}{-0.9125} \right| = 0.096$$

Eğer 4 noktayı biliniyorsa yani $x_{i-2}, x_{i-1}, x_{i+1}$ ve x_{i+2} biliniyorsa birinci türev

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$f_{i+2} = f_i + 2hf_i' + \frac{4h^2}{2!} f_i'' + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \dots$$

$$f_{i-2} = f_i - 2hf_i' + \frac{4h^2}{2!} f_i'' - \dots$$

Birincinin 8 katı ile dördüncü Toplanıp, ikinci ve üçüncünün sekiz katından çıkarılırsa

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

$$f_i' \cong \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

2. Mertebeden Türev Yaklaşımı

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \dots$$

+

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \dots$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$f_i'' \cong \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

4 noktanın bilinmesi durumunda 2. Türev ;

$$f_i'' \cong \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + O(h^2)$$

3. türev için;

$$f_i''' \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$

ÖRNEK:

$f(x) = xe^x$ fonksiyonu ile ilgili olarak aşağıdaki tabloda verildi.

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x)$	10.889	12.703	14.778	17.149	19.855
	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}

$x=2$ için $h = 0.1$ olarak fonksiyonun 1.ve 2. Türevlerini hesaplayınız.

1. türev ;

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$
$$= \frac{-19.855 + 8(17.149) - 8(12.703) + 10.889}{12(0.1)} = 22.168$$

Fonksiyonun gerçek değeri;

$$f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow e^2 + 2e^2 = 22.167$$

$$\text{Görelî hata} \Rightarrow r = \frac{|22.167 - 22.168|}{22.167} = 0.00005$$

2. türev;

$$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$
$$= \frac{-19.855 + 16(17.149) - 30(14.778) + 16(12.703) - 10.889}{12(0.1)^2} = 29.56$$

Gerçek değeri;

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x \Rightarrow e^2(2+2) = 29.556$$

$$\text{Görelî hata} \Rightarrow r = \frac{|29.556 - 29.561|}{29.556} = 0.00000338$$

3. türev;

$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$
$$= \frac{19.855 - 2(17.149) + 2(12.703) - 10.889}{2(0.1)^3} = 37$$

Gerçek değer;

$$f''(x) = e^x + e^x + e^x + xe^x \Rightarrow e^2(2+3) = 36.9452$$

$$\text{Görelî hata} \Rightarrow r = \frac{|36.9452 - 37|}{36.9452} = 0.0015$$

Türev Eşitlikleri
$f_i' \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$
$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$
$f_i''' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-2}}{h^2}$
$f_i'''' = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$
$f_i'''''' \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
<http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html>
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
Doç. Dr. Ömer AKIN
A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
Mustafa BAYRAM (2002)