BÖLÜM 14

Sayısal İntegral

$\left[a,b\right]$ sonlu a,b aralığı üzerinde $I\left(f\right)=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ integral tanımlansın. Bu tür integralleri hesaplamak için çok sayıda yöntem vardır. Bunların bir çoğu f fonksiyonu yerine yaklaşan fonksiyonların kullanılması esasına dayanır. f fonksiyonu için yaklaşan bir fonksiyon ailesi $\left\{f_n,\ n\geq 1\right\}$ olsun.

$$\max_{a\leq x\leq b}\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$I\left(f_n\right)=\int\limits_a^b f\left(x_n\right)dx$$

$$E_n\left(f\right)=I\left(f\right)-I\left(f_n\right)$$

Yamuk Kuralı

$f(x)$ fonksiyonunun $\left[a,b\right]$ aralığında integrali bulunmak istenirse $x_0=a$ ve $x_1=a+h=b$ olsun.

Birinci dereceden lagrange interpolasyon polinomu

$$P_1\left(x\right)=\frac{x-b}{a-b}f\left(a\right)+\frac{x-a}{b-a}f\left(b\right)$$

Şeklinde yazılır. Buradan

$$I\left(P_1\right)=\int\limits_a^b\left[\frac{x-b}{a-b}f\left(a\right)+\frac{x-a}{b-a}f\left(b\right)\right]dx+\frac{1}{2}\int\limits_a^b(x-a)(x-b)\frac{f(\xi_x)}{2!}dx$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]+E_1=\frac{h}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]+E_1$$

$$E_1=\frac{1}{2}\int\limits_a^b(x-a)(x-b)\frac{f''(\xi_x)}{2!}dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi_x)=-\frac{h^3}{12}f''(\xi_x)\ ,\quad \xi_x\in\left[a,b\right]$$

$$I(P_1)=\frac{h}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]-\frac{h^3}{12}f''(\xi_x)$$

Bu formülü yamuk kuralı denir.

$x_j = a + jh,\ j = 0,1,2,\ldots,n$

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\partial x \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\partial x \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{h}{2}\big(f(x_{j-1}) + f(x_j) \big) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_j) \right] \\
&= \frac{h}{2}\left[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \ldots + (f_{n-1} + f_n) \right] - \sum_{j=1}^{n} \frac{h^3 f''(\xi_j)}{12} \\
&= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n \right] - \sum_{j=1}^{n} \frac{h^3 f''(\xi_j)}{12} \quad ,\ \xi \in [a,b]
\end{aligned}$$

$$I(f) = I(f_n) - \frac{h^3}{12} n \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \right]$$

$$I(f) = I(f_n) - \frac{h^3 n}{12} f''(\eta) \quad ,\quad n = \frac{b-a}{h}$$

$$|E_n(f)| = \left| -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \right|, \quad a < \eta < b\ ,$$

Örnek: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ fonksiyonunun $0 \le x \le 1$ aralığında $n = 4$ için yaklaşık değerini yamuk kuralı ile integral değerini hesaplayınız. Hata için üst sınırı bulunuz.

Çözüm:

$$I_n = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n \right]$$

$n = 1$ için $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{1} = 1$

$$I_1 = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right] = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1) \right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} \right] = 0.75$$

$n = 2$ için $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$I_2 = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + f_2 \right] = \frac{1}{2}\left[f(0) + 2f(1/2) + f(1) \right] = \frac{1/2}{2}\left[1 + 2\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] = 0.7083$$

$n = 3$ için $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$

$$I_3 = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3 \right] = \frac{1}{2}\left[f(0) + 2f(1/3) + 2f(2/3) + f(1) \right]$$

$$= \frac{1/3}{2}\left[1 + 2\frac{1}{1+\frac{1}{3}} + 2\frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \right] = 0.70$$

$n = 4$ için $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

$$I_4 = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4 \right] = \frac{1}{2}\left[f(0) + 2f(1/4) + 2f(2/4) + 2f(3/4) + f(1) \right]$$

$$= \frac{1/4}{2}\left[1 + 2\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + 2\frac{1}{1+\frac{2}{4}} + 2\frac{1}{1+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right] = 0.697$$

Gerçek değer:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = 0.69314$$

$n = 4$ için hata;

$$\left| E_n(f) \right| = \left| -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \right| , \quad a < \eta < b$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\max_{0 \le \eta \le 1} f''(\eta) = \max_{0 \le \eta \le 1} \frac{2}{(1+\eta)^3} = 2$$

$$\left|E_4(f)\right| \le \left|\frac{-(1-0)\left(\frac{1}{4}\right)^2}{12}\cdot 2\right| = 0.0104$$

Simpson Kuralı

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$c = \dfrac{a+b}{2}$, c değeri $[a,b]$ değerinin orta noktasıdır.

$$P_2(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$$

$$I(P_2) = \int_a^b P_2(x)\,dx$$
$$= \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$I_n = \int_a^b P_n(x)dx + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) f^{(n+1)}(\xi)dx$$

n çift olduğundan

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} P_2(x)\,dx + E_n$$
$$= \sum_{j=1}^{n/2} \frac{h}{3}\left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right] + E_n$$
$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + f_n\right] + E_n$$

n çift sayı olmalı.

Hatanın üst sınırı;

$$Hata = -\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)dx \quad , \quad , \; a \le \xi \le b$$

şeklindedir.

$n = 2$ alalım bu durumda hata;

$$E=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{x_0}^{x_0+2h}(x-x_0)(x-x_0-2h)(x-\frac{x_0+x_0+2h}{2})dx$$

$$=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)\quad ,\ x_0<\xi<x_0+2h$$

Olur. Bu durumu genellediğimizde hata için üst sınır

$$E_n=-\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n}f^{(4)}(\xi_j)=-\frac{h^5}{90}n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f^{(4)}(\xi_j)\right)=-\frac{h^5}{90}nf^{(4)}(\eta)=-\frac{h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(\eta)\quad ,\quad ,\quad \eta\in(a,b)$$

Şeklinde elde edilir. burada $h=\dfrac{b-a}{2n}$ dir.

Örnek: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x}$ fonksiyonunun $0\le x\le 1$ aralığında $n=4$ için yaklaşık integral değerini hesaplayınız. Hata için üst sınırı bulunuz.

$$I_4\left(f\right)=\frac{\frac{1}{4}}{3}\left[1+4\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+2\frac{1}{1+\frac{2}{4}}+4\frac{1}{1+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right]=0.6932$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}\quad ,\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}\quad ,\quad f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\max_{0\le\xi\le1}f^{(4)}(\eta)=\max_{0\le\xi\le1}\frac{24}{(1+\eta)^5}=24$$

$$\left|E_4\right|\le\left|\frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^4(1-0)}{180}\cdot 24\right|=0.0005208$$

Romberg metoduyla nümerik integral

$$h_k=\frac{(b-a)}{m_k}=\frac{(b-a)}{2^{k-1}}$$

$$R_{1,1}=\frac{h_1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]=\frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$k = 2, 3, \ldots, n$ için

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (i - \frac{1}{2})h_{k-1} \right) \right]$$

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \quad , \quad i = 2, 3, \ldots, n \quad \text{ve} \quad j = 2, 3, \ldots, i$$

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$		$R_{n,n}$

Örnek: $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $\int_0^{\pi} \sin x dx$ integralini romberg integrasyon yöntemini uygulayarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm: $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}\left[\sin 0 + \sin \pi \right] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] = 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + \frac{\pi}{4}\left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} \right) \right] = 1.9742316$$

$$R_{5,1} = 1.99357034$$

$$R_{6,1} = 1.99839336$$

$$R_{2,2} = \frac{4R_{2,1} - R_{1,1}}{4 - 1} = \frac{4(1.57079633) - 0}{3} = 2.09439511$$

$\vdots$

0					
1.57079633	2.09439511				
1.89611890	2.00455976	1.99857073			
1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555		
1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000001	1.99999999	
1.99839336	2.00000103	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000

Gerçek değer:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2$$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)