Normal Formlu Lineer Sistemlerin Teorisi

Bu bölümde

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + F_1(t) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + F_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

sistemi ele alınmaktadır, burada $a_{ij}(t)$ ve $F_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n)$ fonksiyonlarının tümü bir reel $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli kabul edilmektedir.

(1) sistemi

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ ... \\ F_n(t) \end{pmatrix} \text{ ve } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t) \tag{2}$$

vektör diferensiyel denklemi biçiminde yazılabilir.

Teorem 1. $A(t)$ matrisi ve $F(t)$ vektörü $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda (2) denkleminin

$$x(t_0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ ... \\ x_{n0} \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulunu sağlayan bir tek

$$x = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ ... \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

çözümü vardır ve bu çözüm $a \leq t \leq b$ aralığı boyunca tanımlıdır.

(1) denklem sisteminde her t ve her $i = 1, 2, ..., n$ için $F_i(t) = 0$ kabul edilirse,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \tag{3}$$

homogen lineer sistemi bulunur. (3) homogen lineer sistemine karşılık gelen vektör diferensiyel denklemi de

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4}$$

şeklindedir.

Sonuç 1. (4) vektör diferensiyel denkleminin

$$x(t_0) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümü

$$x = \varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

dır.

Teorem 2. Homogen lineer (4) vektör diferensiyel denkleminin m tane çözümünün bir lineer kombinasyonu da (4) denkleminin bir çözümüdür. Yani $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ vektör fonksiyonları (4) ün çözümleri ve $c_1, c_2, ..., c_m$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\phi = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$$

vektör fonksiyonu da (4) ün bir çözümüdür.

Şimdi aşağıda tanımlanan vektör fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \\ \phi_{21}(t) \\ ... \\ \phi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \phi_{12}(t) \\ \phi_{22}(t) \\ ... \\ \phi_{n2}(t) \end{pmatrix}, ..., \ \phi_n(t) = \begin{pmatrix} \phi_{1n}(t) \\ \phi_{2n}(t) \\ ... \\ \phi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Tanım 1.

$$\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & ... & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & ... & \phi_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & ... & \phi_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

determinantına (5) ile tanımlanan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonlarının Wronskiyeni denir, $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t)$ ile gösterilir.

Teorem 3. (5) ile tanımlanan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonları $a \leq t \leq b$ üzerinde lineer bağımlı ise, bu durumda onların $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t)$ Wronskiyeni her $t \in [a, b]$ için sıfıra eşittir.

Teorem 4. (5) ile tanımlanan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonları $a \leq t \leq b$ üzerinde (4) vektör diferensiyel denkleminin çözümleri olsun. Bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t_0) = 0$ ise, bu durumda $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonları $a \leq t \leq b$ üzerinde lineer bağımlıdır.

Sonuç 2. (5) ile tanımlanan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonları $a \leq t \leq b$ üzerinde (4) vektör diferensiyel denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ cümlesinin $[a, b]$ üzerinde lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $a \leq t \leq b$ aralığı boyunca

$$W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t) \neq 0$$

olmasıdır.

Tanım 2. (4) vektör diferensiyel denkleminin n tane lineer bağımsız çözümünden meydana gelen bir cümleye (4) ün bir temel çözümler cümlesi denir.

Tanım 3. Kolonları (4) vektör diferensiyel denkleminin bir temel çözümler cümlesini oluşturan bir matrise (4) ün bir temel matrisi denir. Yani $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonları (4) ün bir temel çözümler cümlesini meydana getiriyor ise, bu durumda $n \times n$ türünde

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & ... & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & ... & \phi_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & ... & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

matrisi (4) ün bir temel matrisidir.

Teorem 5. (4) vektör diferensiyel denkleminin bir temel çözümler cümlesi $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ ve homogen olmayan (2) denkleminin bir özel çözümü ϕ_0 olsun. Bu durumda (2) denkleminin genel çözümü

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + ... + c_n\phi_n + \phi_0$$

dır, burada $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitlerdir.