Matris Metodu (n-Denklem, n-Bilinmeyen Fonksiyon)

Bu bölümde

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

sistemi ele alınmaktadır, burada a_{ij} $(i = 1, 2, ..., n; \;\; j = 1, 2, ..., n)$ reel sabitlerdir.

(1) sistemi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ve } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2}$$

biçiminde homogen lineer vektör diferensiyel denklemi olarak yazılabilir.

Burada (1) sisteminin ya da eşdeğer olarak (2) vektör diferensiyel denkleminin çözümlerini bulmaya çalışacağız. Bunun için iki boyutlu lineer sistemler için daha önce açıklanan Euler yöntemi uygulanacaktır. O halde (1) sisteminin

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 e^{\lambda t} \\ x_2 &= \alpha_2 e^{\lambda t} \\ &... \\ x_n &= \alpha_n e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{3}$$

şeklinde aşikar olmayan bir çözümünü arayalım, burada $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ve λ reel ya da kompleks sayılardır. (3) çözümünün vektör formu

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \;\; \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

dir. (4) vektörü (2) de yerine yazılırsa,

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}$$

ve düzenlenirse,

$$(A - \lambda I)\alpha = 0 \tag{5}$$

bulunur, burada I $n \times n$ türünde birim matristir. (5) denklemi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ bilinmeyenlerine göre aşağıdaki homogen lineer cebirsel denklem sistemidir.

$$\left\{ \begin{array}{c} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

(6) sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul katsayılara matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

ya da matris notasyonu cinsinden

$$|A - \lambda I| = 0$$

dır. (7) denklemi (2) vektör diferensiyel denklemindeki $A = (a_{ij})$ katsayı matrisinin *karakteristik denklemi* olarak bilinir. Bu denklem λ ya göre $n-$yinci dereceden bir denklem olup $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ kökleri A nın *özdeğerleridir.* Her bir λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ özdeğeri (6) sisteminde yerine yazılarak (6) sisteminin bu değere karşılık gelen aşikar olmayan bir çözümü

$$\alpha_1 = \alpha_{1i}, \;\; \alpha_2 = \alpha_{2i}, ..., \alpha_n = \alpha_{ni} \; (i = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla

$$\alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ ... \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \;\; i = 1, 2, ..., n$$

vektörü λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür.

Böylece (2) vektör diferensiyel denklemi

$$x = \alpha e^{\lambda t}$$

şeklinde bir çözüme sahip ise, bu durumda λ sayısı A katsayı matrisinin bir λ_i özdeğerine eşit ve α vektörü de A matrisinin bu λ_i özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 - 12x_3 \\ \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \tag{8}$$

homogen lineer sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (8) sisteminin çözümünü

$$x = \alpha e^{\lambda t}$$

yani

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t} \\ x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t} \\ x_3 = \alpha_3 e^{\lambda t} \end{cases} \tag{9}$$

şeklinde arayalım. (9) ifadesi (8) de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{cases} (7-\lambda)\alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ -10\alpha_1 + (4-\lambda)\alpha_2 - 12\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + (-1-\lambda)\alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

bulunur. Bu homogen lineer cebirsel sistemin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bilinmeyenlerine göre aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 6 \\ -10 & 4-\lambda & -12 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

olmasıdır. Bu determinant hesaplanırsa,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

katsayı matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 31\lambda - 30 = 0$$

bulunur. Buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$ ve $\lambda_3 = 5$ bulunur.

$\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için, $\lambda_1 = 2$ değeri (10) sisteminde yerine yazılır. Bu durumda

$$\begin{cases} 5\alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ -10\alpha_1 + 2\alpha_2 - 12\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek aşikar olmayan bir çözüm, dolayısıyla $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\lambda_2 = 3$ ve $\lambda_3 = 5$ e karşılık gelen özvektörler sırasıyla,

$$\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Buradan (8) sisteminin bir temel çözümler cümlesi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} e^{5t}$$

biçimindedir. Buradan verilen sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + 3c_3 e^{5t} \\ x_2 = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} - 6c_3 e^{5t} \\ x_3 = -c_1 e^{2t} - c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{5t} \end{cases}$$

dir, burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.