n-Bilinmeyenli Homogen Olmayan Lineer Sistemler (Parametrelerin Değişimi Yöntemi)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t) \tag{1}$$

sistemini ele alalım, burada

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ ... \\ F_n(t) \end{pmatrix} \text{ ve } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

dir. Bu bölümde amacımız (1) sisteminin bir özel çözümünü bulup genel çözümünü yazmaktır. (1) sistemine ilişkin homogen

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2}$$

sisteminin genel çözümü

$$x = x_h(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + ... + c_n\phi_n(t) \tag{3}$$

olsun, burada

$$\{\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)\}$$

(2) sisteminin bir temel çözümler cümlesi ve $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitlerdir. (3) çözümü

$$\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t))$$

(2) nin bir temel matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned} x_h(t) &= (\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \Phi(t)C \end{aligned} \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir. Parametrelerin değişimi yönteminin uygulamak için (1) sisteminin bir özel çözümünü

$$x = x_p(t) = \Phi(t)C(t) \tag{5}$$

şeklinde arayalım, burada $\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t))$ (2) nin bir temel matrisi, $C(t) = (c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t))^T$ dir.

(5) ifadesi (1) sisteminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\Phi(t)C'(t) = F(t)$$

ve buradan

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t) \tag{6}$$

elde edilir. (6) nın her iki yanının integrali alınır ve integral sabiti sıfır alınırsa,

$$C(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

elde edilir. Bu ifade (5) de yerine yazılarak

$$x_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

özel çözümü bulunur. Böylece (1) sisteminin genel çözümü

$$\begin{aligned} x &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 1.

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix} \tag{7}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (7) sistemine karşılık gelen homogen sistem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x \tag{8}$$

olup

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

katsayı matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$ dir. Euler Metodu ile (8) sisteminin temel çözümler cümlesi

$$\left\{ \phi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t,\ \phi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^t,\ \ \phi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^t \right\}$$

olarak bulunur. Buradan (8) sisteminin bir temel matrisi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 2e^t & e^t \sin 2t & -e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

ve (7) sisteminin bir özel çözümü

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) F(t) dt \\ &= \frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \sin 2t + \cos 2t - \cos 4t \cos 2t - \sin 4t \sin 2t \\ 4t \cos 2t + \sin 4t \cos 2t - \sin 2t \cos 4t + \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde (7) sisteminin genel çözümü

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^t \\ -3c_1 e^t + c_2 e^t \cos 2t + c_3 e^t \sin 2t + \frac{e^t}{8}(-4t \sin 2t + \cos 2t - \cos 4t \cos 2t - \sin 4t \sin 2t) \\ 2c_1 e^t + c_2 e^t \sin 2t - c_3 e^t \cos 2t + \frac{e^t}{8}(4t \cos 2t + \sin 4t \cos 2t - \sin 2t \cos 4t + \sin 2t) \end{pmatrix}$$

dir.